V. Form und Gegenform

Unser Ausgangspunkt ist noch einmal das von vier Geraden umgrenzte Gebiet, das wir schon betrachtet haben. Das Gebilde besteht aus vier Geraden, die ein Viereck – im gewöhnlichen Sinne – in einer Ebene erzeugen. Man sieht, dass insgesamt sechs Schnittpunkte entstehen (Abb. 50). Dieses Gebilde soll wiederum erweitert werden, wie wir es bei der Netzbildung schon getan hatten, diesmal unter einem etwas anderen Gesichtspunkt. Zunächst werden noch unverbundene Schnittpunkte miteinander verbunden. Dadurch ergeben sich weitere drei Geraden, die in Abbildung 51 blau eingezeichnet sind. Durch jeden der ursprünglichen Punkte laufen nun drei Geraden und es sind drei neue Schnittpunkte entstanden: der Schnittpunkt der Diagonalen im Innerndes Vierecks sowie zwei Punkte, die auf der Verbindungsgeraden der beiden Ecken liegen, die nicht das im Endlichen liegende Vierecksgebiet begrenzen. Diese Konstruktion ist identisch mit derjenigen, die wir bereits ausgeführt hatten, um harmonische Punktwürfe zu konstruieren. Jetzt ziehen wir die noch möglichen Verbindungsgeraden. Wir gehen von den vier Punkten auf der oberen blauen Linie aus. Von zwei dieser Punkte aus laufen Geraden, die die Diagonalen des endlichen Vierecks bilden. Von jedem dieser Punkte lassen sich zwei weitere Geraden durch je eine Ecke des Vierecks legen. Durch die beiden übrigen Punkte laufen bereits je zwei Geraden, die die Seiten des Vierecks bilden. Von jedem dieser Punkte kann man noch eine Gerade durch den Schnittpunkt der Diagonalen ziehen. Insgesamt ergibt das sechs weitere Geraden, die hier rot gezeichnet sind (Abb. 52). Die Figur ist nun vollständig. Es haben sich vier weitere Schnittpunkte ergeben, die so beschaffen sind, dass durch jeden von ihnen drei der zuletzt hinzugefügten Geraden laufen. Durch die übrigen neun Schnittpunkte gehen nun jeweils vier Geraden. Das Gebilde nennt sich harmonische Grundfigur, es ist in sich polar. Es besteht aus dreizehn Geraden und aus dreizehn Punkten. Auf neun von diesen Geraden liegen jeweils vier Punkte und auf den übrigen vier Geraden (den grünen, von denen wir ausgegangen sind) liegen jeweils drei Punkte. Durch neun von diesen Punkten gehen jeweils vier Geraden und durch die übrigen vier Punkte jeweils drei (die zuletzt entstandenen Schnittpunkte). Die harmonische Grundfigur enthält insgesamt neun harmonische Punktwürfe: auf jeder der blauen sowie der roten Geraden ist einer davon zu finden.[1] Die vier grünen Geraden bilden ein von den Seiten ausgehend entstandenes Viereck (Vierseit, vier Geraden, sechs Ecken), die roten Geraden bilden ein von den Ecken ausgehend entstandenes Viereck (Vierpunkt, vier Ecken, sechs Geraden). Beide haben einen gemeinsamen Mittelpunkt, den Diagonalenschnittpunkt. Sie haben aber noch eine weitere Gemeinsamkeit: würde man die Figur umgekehrt aufbauen, also beginnend mit den sechs roten Geraden und dann ergänzen, so ergäben sich dieselben blauen und in der Folge dieselben grünen Geraden. Die blauen Geraden stellen das gemeinsame Nebendreieck für das rote und das grüne Viereck dar. Die harmonische Grundfigur stellt also zwei ineinander liegende Vierecke (Vierseit und Vierpunkt) mit einem gemeinsamen Nebendreieck dar.

Man kann der harmonischen Grundfigur nun Kegelschnitte einschreiben und zwar auf folgende Art: Die vier Ecken, die durch die grünen Geraden gebildet werden und das ganz im Endlichen liegende Vierecksgebiet begrenzen, liegen auf dem Kegelschnitt, die vier roten Geraden, die durch je einen dieser Eckpunkte laufen stellen Tangenten an den Kegelschnitt in diesen Punkten dar. Grundsätzlich ist dies mit allen Kegelschnitten möglich, am einfachsten erklären kann man es am Kreis, gezeichnet ist es hier für Kreis und Ellipse (Abb. 53 u. 54).

[1] Man könnte die Polarisierung noch weiter führen, denn die Figur enthält ebenfalls neun harmonische Strahlenwürfe. Da die bisherigen Betrachtungen zu den harmonischen Würfen sich weitgehend auf harmonische Punktwürfe beschränkt haben, deute ich dies hier nur an.

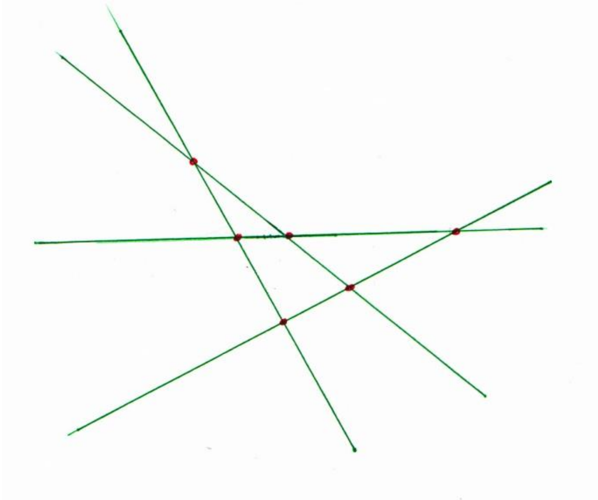


Abb. 50

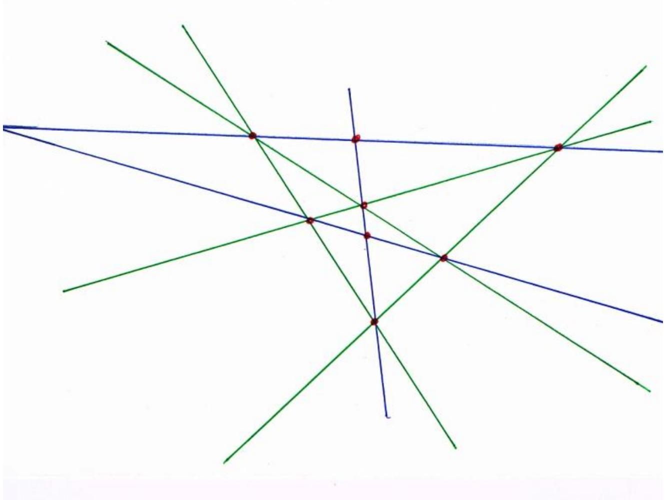


Abb. 51

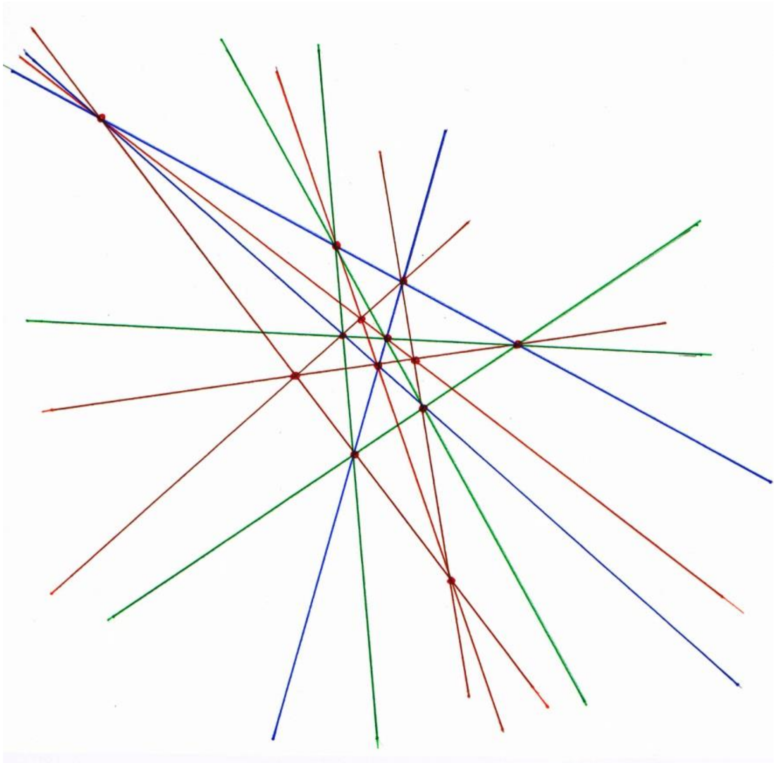


Abb. 52

In Bezug auf einen solchen Kegelschnitt wird das blaue Nebendreieck nun zum Polardreieck. Zwei der drei blauen Geraden schneiden den Kreis. Betrachten wir zunächst eine davon: durch die beiden Schnittpunkte, der blauen Geraden mit dem Kreis, die in der Zeichnung von links unten nach rechts oben läuft, laufen Tangenten. Diese Tangenten schneiden sich in einem Punkt auf der blauen Geraden, die den Kreis nicht schneidet. Dieser Punkt sowie die schneidende Gerade sind einander in einer besonderen Weise zugeordnet. Sie sind Pol und Polare in Bezug auf den Kreis. Der Punkt, in dem sich die Tangenten an die Polare schneiden, stellt den Pol dar, die Gerade, in deren Schnittpunkten an den Kreis Tangenten liegen, die sich im Pol treffen, heisst die Polare. Pol und Polare liegen immer harmonisch zueinander in Bezug auf die beiden Schnittpunkte mit dem Kreis, die auf der Geraden liegen, die durch den Pol geht und die Polare trifft. (blaue Gerade von links oben nach rechts unten in der Zeichnung). Erstaunlich ist nun folgendes: die beiden Polaren, die den Kreis schneiden, kreuzen sich nicht in einem beliebigen Punkt, sondern in dem Schnittpunkt der Diagonalen des die Tangenten bildenden Vierecks. Sie stehen wiederum in einem besonderen Verhältnis zueinander. Die beiden Tangenten an eine Polare schneiden sich in ihrem Pol. Die zweite

Polare, die durch denselben Punkt läuft, hat ihren Pol auf der ersten Polaren. Die ganze Konstruktion spiegelt sich in sich selbst, sie läuft zu sich selbst zurück. Betrachtet man die erste Gerade, die den Kreis schneidet und zeichnet ihre Tangenten, so treffen sich diese im Pol derselben. Zieht man nun vom selben Punkt ausgehend eine weitere Gerade (durch den Diagonalenschnittpunkt) und zeichnet ihre Tangenten, so treffen sie sich wiederum auf der ersten Geraden. Will man von dort wiederum eine Gerade durch den Diagonalenschnittpunkt legen, so fällt sie mit der ersten Geraden zusammen. Der ganze Prozess fällt also beim zweiten Schritt in sich selbst zurück (Abb. 55). Die beiden Polaren haben ihre Pole jeweils aufeinander liegen. Auch der Schnittpunkt der beiden blauen, den Kreis schneidenden Geraden ist ein Pol. Die dritte blaue Gerade, die den Kreis nicht schneidet, stellt die dazu gehörige Polare dar. Dies ist der Sinn des Ausdrucks Polardreieck: die drei blauen Geraden bilden ein Dreieck. Dieses hat, wie jedes Dreieck drei Seiten und drei Schnittpunkte (Ecken). In Bezug auf den der zugehörigen harmonischen Grundfigur eingeschriebenen Kegelschnitt stellt jeweils eine Seite des Polardreiecks die Polare und die nicht auf derselben Seite liegende Ecke desselben den Pol dar.

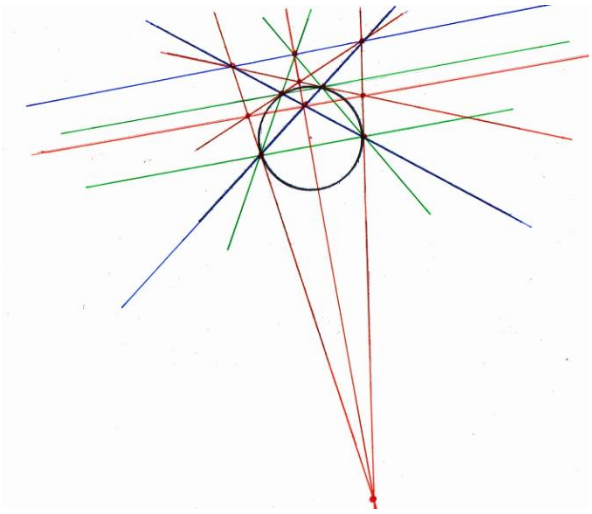


Abb. 53

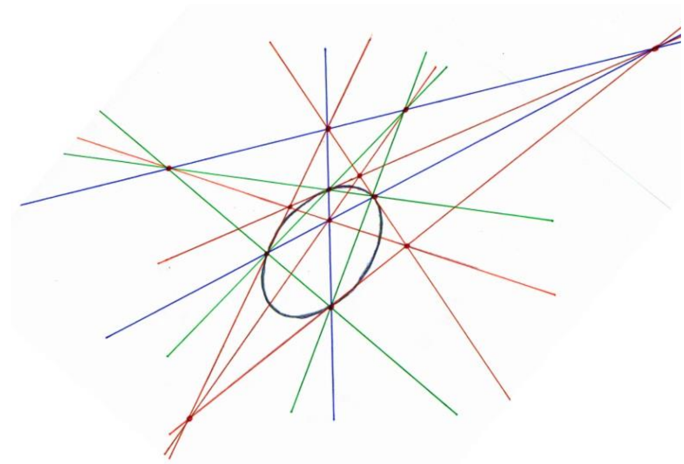


Abb. 54

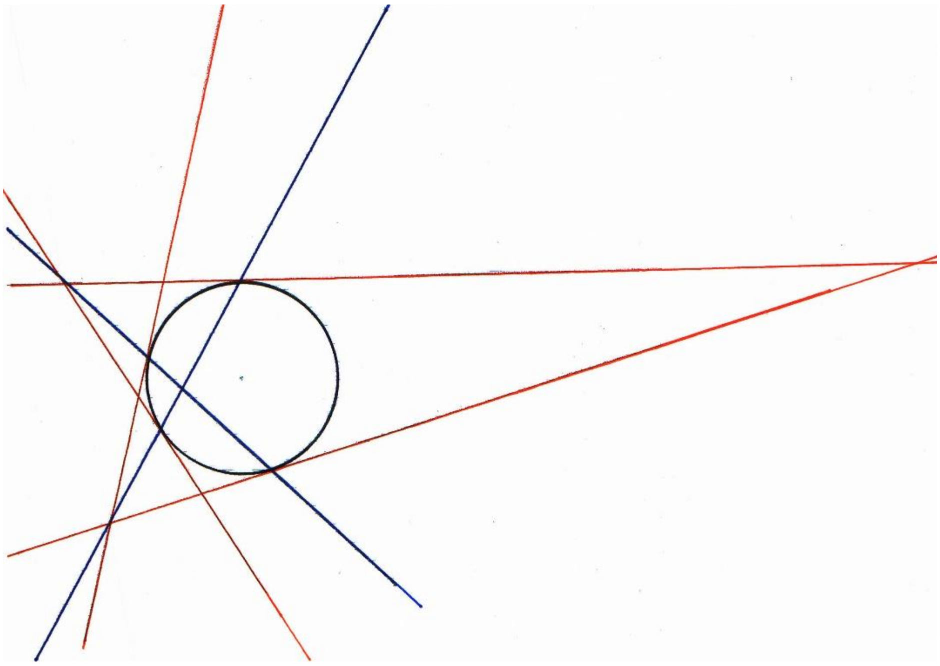


Abb. 55

In Abbildung 56 sieht man verschiedene Geraden, die den Kreis schneiden und alle durch den gleichen Pol laufen. Gleichzeitig wurden an die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Kreis jeweils die Tangenten gelegt. Alle Tangenten schneiden sich auf der Polaren des Pols, durch den die

Geraden laufen. Dieses Gebilde wirkt in besonderer Weise harmonisch. Auf jeder den Kreis schneidenden Geraden liegt ein harmonischer Punktwurf: Pol und Polarenschnittpunkt liegen in Bezug auf die beiden Schnittpunkte mit der Kreislinie jeweils harmonisch. Betrachtet man umgekehrt die Polare der Ausgangsfigur, so hat man auf dieser eine Fülle von harmonischen Punktwürfen, nämlich ebenso viele, wie vom Pol ausgehend Geraden durch den Kreis laufen. Jede Gerade, die die ursprüngliche Polare, die blaue Gerade, schneidet, hat ihren Pol (Tangentenschnittpunkt) auf dieser. Jeder dieser Tangentenschnittpunkte bildet den Pol derjenigen Polaren, die ihm durch die Tangentenschnittpunkte zugeordnet ist. Jedes dieser Paare bildet, zusammen mit den von der blauen Gerade geschnittenen Kreispunkten auf dieser einen harmonischen Punktwurf.

Im Prinzip kann man natürlich auch mit einem beliebigen Zentrum und mit einer beliebigen Achse die obere Hälfte der Kreispunkte in die untere Hälfte spiegeln (Abb. 57). Legt man dann eine Tangente an den oberen Kreisschnittpunkt einer Geraden, so schneidet sie die Achse an irgendeiner Stelle. Legt man von diesem Schnittpunkt ausgehend eine Tangente an die untere Kreishälfte, so berührt sie den Kreis irgendwo, nicht im unteren Schnittpunkt der schneidenden Geraden. Es ergibt sich also nicht ein vergleichbarer harmonischer Aufbau, wie in dem Fall, wo Zentrum und Achse Pol und Polare in Bezug auf den Kreis darstellen.

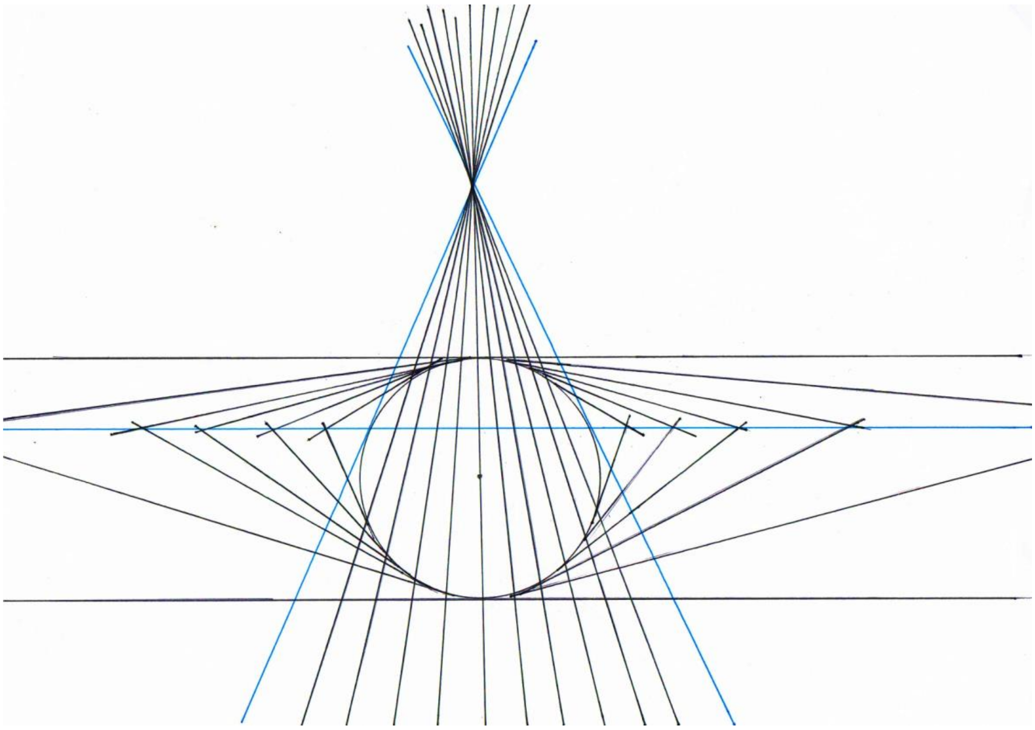


Abb. 56

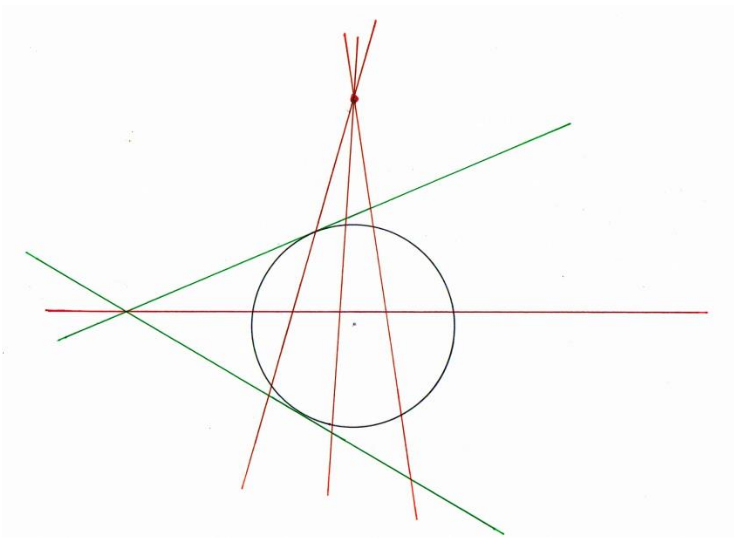


Abb. 57

Pol und Polare stehen in einem ganz bestimmten Bewegungsverhältnis zueinander. In den beiden vorangehenden Zeichnungen war die Darstellung so gewählt, dass die Polare den Kreis schneidet und der Pol ausserhalb des Kreises liegt. Das Umgekehrte ist ebenso gut möglich. Liegt der Pol innerhalb des Kreises, so liegt die Polare ausserhalb. Man kann Pol und Polare so in Bewegung denken, dass die angehaltene Bewegung in jedem Moment harmonische Lage zeigt. Die Bewegungsgebärde entspricht derjenigen, die wir bei der harmonischen Lage von vier Punkten bereits betrachtet haben. Bewegt sich ein Punkt – nun als Pol gedacht – innerhalb des Kreises auf einer Geraden vom Mittelpunkt zur Peripherie, so kommt ihm die zugehörige Polare, rechtwinklig dieselbe Gerade schneidend, vom Fernpunkt derselben ausgehend, entgegen. Auf der Kreislinie begegnen sie sich und die Polare wird zur Tangente. Läuft der Punkt nun weiter nach aussen und die Gerade nach innen, so tauschen sie ihre Bewegungsgebärden aus. Einer gleichmässigen Bewegung innerhalb des Kreises entspricht eine Beschleunigung ausserhalb desselben (Abb. 47). Einer gleichmässigen Bewegung ausserhalb des Kreises entspricht eine Stauung innerhalb desselben. (Abb. 48) Grundsätzlich hatten wir solche Verhältnisse bereits im letzten Kapitel betrachtet. Läuft die Tangente um einen Radius nach aussen, so bewegt sich der entsprechende Punkt um einen halben Radius nach innen. Läuft die Gerade um einen weiteren Radius nach aussen, so bewegt sich der Punkt so, dass er nun um ein Drittel des Radius vom Kreismittelpunkt entfernt ist. Die Verhältnisse entsprechen also jeweils dem Kehrwert: Zwei zu ein Halb, Drei zu ein Drittel und so weiter. Das Entscheidende daran ist, dass man so jedem Punkt innerhalb des Kreises eindeutig eine Gerade ausserhalb des Kreises zuordnen kann und umgekehrt. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit, Formen zu polarisieren. Zeichnet man eine Figur in einen Kreis, so kann man auf dieser Punkte markieren und jedem der markierten Punkte entspricht eine Gerade ausserhalb des Kreises. Diese Geraden bilden Tangenten an die polare Form. Hier ergibt sich ein weites Übungsfeld, denn es ist manchmal erstaunlich, wie die polar einander zugeordneten Formen beschaffen sind.

Im Folgenden werden zwei auf diese Weise entstandene Metamorphosenreihen gezeigt. Für Diejenigen, die sich angeregt fühlen, ähnliche Konstruktionen selber zu versuchen, sind im Anhang Konstruktionsbeschreibungen beigefügt.

Allen Zeichnungen ist der schwarze Kreis gemeinsam. Dieser stellt den polarisierenden Kreis dar. Die rot gezeichnete Form zeigt jeweils die Ausgangssituation, die grün gezeichnete stellt die polare Entsprechung dar. Abbildung 58 zeigt fünf gleichmässig im Kreis verteilte Punkte, die sich zu fünf ausserhalb des Kreises liegenden Geraden umwandeln. In Abbildung 59 sind die Punkte zu kleinen Kreisen angewachsen. Aus den zugeordneten Geraden ist jeweils eine Hyperbel geworden. Stellt man sich den Punkt so vor, dass er aus einem immer kleiner werdenden Kreis entsteht, so kann man sagen, dass er die grösstmögliche Krümmung hat. Polar dazu ist die Gerade überhaupt nicht gekrümmt. Wird aus dem Punkt ein Kreis, so nimmt die Krümmung ab. Polar dazu sind die beiden Hyperbeläste im Vergleich zur Geraden leicht gekrümmt. Wachsen die Kreise (Abb. 60), so nimmt deren Krümmung weiter ab. Die Krümmung der polaren Form (wiederum Hyperbeln) nimmt leicht zu. In Abbildung. 61 sind die Kreise so weit angewachsen, dass sie einerseits den Rand des polarisierenden Kreises berühren, andererseits durch dessen Mittelpunkt gehen. Dem entspricht als polare Form die Parabel, die ebenfalls in einem Punkt den polarisierenden Kreis berührt. Die beiden Seitenäste der Parabel nähern sich immer mehr der Parallellage an und erreichen diese in der Unendlichkeit. Die Parabel ist also über einen unendlich fernen Punkt geschlossen. Dieser unendlich ferne Punkt korrespondiert mit dem Mittelpunkt des polarisierenden Kreises. Wachsen die roten Kreise weiter, über den Mittelpunkt des polarisierenden Kreises hinaus, so ziehen sich die polaren Formen zusammen. Sie werden ebenfalls zu Kreisen (Abb. 62). Weiteres Wachstum der ursprünglichen Form bewirkt ein weiteres Zusammenziehen der Gegenform (Abb. 63).

Eine weitere Reihe beginnt mit einer Art Doppelschleife, ähnlich einer Acht, die den polarisierenden Kreis nicht berührt (Abb. 64). Diese Form durchläuft den Kreismittelpunkt zweimal. Entsprechend läuft die polare Form zweimal durch die Unendlichkeit. Durchläuft man z. B. den unteren Ast von rechts nach links, so setzt sich dieser über den Blattrand hinaus fort, durchläuft die Unendlichkeit und kehrt, von unten rechts kommend, in die Sichtbarkeit zurück, um von dort aus den oberen Teil der Kurve zu durchlaufen und nach einem nochmaligen Durchgang durch die Unendlichkeit wieder an den Ausgangspunkt zu gelangen. Abbildung 65 zeigt im Prinzip dasselbe, nur berührt die Ausgangsform den Rand des Kreises. Die polare Form tut dies ebenso. In Abbildung 66 ist die Ausgangsform über den Rand des polarisierenden Kreises hinausgewachsen. Entsprechend zieht sich die Gegenform in den Kreis hinein. Zwei weitere Abbildungen zeigen, was sich ergibt, wenn die

Schleifenform unregelmässig gestaltet ist. In Abbildung 67 ist der untere Teil der Schleife bauchig ausgeweitet, der obere dagegen ziemlich klein. Der Kreuzungspunkt der beiden Schleifen liegt nun oberhalb des Kreismittelpunktes. Dem unteren, breit gedrückten Teil der Schleife entspricht der eiförmige Teil der polaren Form. Dass die Form in zwei Spitzen, sogenannte Dornspitzen, hinein läuft, hängt damit zusammen, dass der Kreuzungspunkt der beiden Schleifen nun nicht mehr durch den Mittelpunkt des polarisierenden Kreises läuft.[2] Abbildung 68 zeigt eine gänzlich unregelmässige Form der Schleife.

Abbildung 69 zeigt noch eine andere Form der Metamorphose. Zwischen der Achse a und dem Zentrum B verwandeln sich Kegelschnitte, so, dass die Scheitelpunkte der Ellipsen, bzw. der Hyperbeln auf der senkrechten schwarzen Geraden zusammen mit den beiden Punkten A und B jeweils einen harmonischen Punktwurf bilden. Man kann diese Zeichnung als festgehaltene Stadien eines kontinuierlichen Bewegungsvorgangs auffassen. Ausgehend von der kleinsten, fast kreisartigen Ellipse, über schlankere elliptische Formen, bildet die Parabel den Übergang zu Hyperbeln. Die genaue Konstruktionsanleitung findet man bei Arnold Bernard.[3]

Spiegelungen, die so beschaffen sind, dass im zurück Spiegeln der ersten Spiegelung der Ausgangspunkt wieder erreicht wird, nennt man Involutionen. Diese sind immer mit einer harmonischen Lage von zwei Elementen zwischen Achse und Zentrum verknüpft. Das Feld der Involutionen ist ein weites und soll in diesem Zusammenhang nicht weiter untersucht werden. Lediglich eine Bemerkung, die den Horizont der Fähigkeiten betrifft, die sich im Umgang mit Involutionen möglicherweise ausdrücken, sei angefügt. Eine paradoxe Erfahrung, die die meisten Zeitgenossen kennen, besteht darin, dass man, indem man sich selbst zu ergründen sucht, zunächst in Gebiete gerät, in denen man das Gesuchte nicht findet, sondern, entgegen der eigenen Absicht immer weiter von sich selber weggeführt wird. So findet man in der Natur keine Antwort auf die Frage nach Sinn und Wirkungsweise des Menschen als eines geistig seelischen Wesens. Die Ergründung des Leibes als einer natürlichen Gegebenheit kann zwar zu einem Verständnis seines Aufbaus führen, klärt aber noch nicht darüber auf, welche Bedeutung menschliche Erlebnisse und Erkenntnisse in der Biographie und darüber hinaus im Weltzusammenhang haben. Wird also etwas durch Sinneswahrnehmung Gegebenes befragt, so kann dieses dem Frager vieles zeigen, nur nicht seinen eigenen Ursprung. Blickt man denkend auf die Tatsache des Fragens selbst, so ergibt sich häufig das Umgekehrte. Der Frager wird sich seiner Ichhaftigkeit bewusst, verliert aber zunächst den welthaften Inhalt der Frage und damit auch die Möglichkeit der Beantwortung. Diese Schwierigkeit, dass man in seinem Bemühen genau das verfehlt, was man erreichen möchte, ist im menschlichen Geistesleben nicht einfach zu umgehen oder zu überspringen. Sich ihr zu stellen, gehört zu den Aufgaben eines geistigen Lebens, das sich selbst verstehen möchte. Andererseits ist das genannte Problem aber auch kein unüberwindbares Schicksal, welches das menschliche Bewusstsein grundsätzlich aus der Wirklichkeit heraustrennen würde. Die Erfahrung, dass man den Geist in der Natur und die Natur im Geist sucht, ist offenbar wichtig auf dem Weg zur Selbsterkenntnis. Eine Anschauung, die den Blick so umkehrt, dass der jeweilige Bedeutungsumkreis der gestellten Frage im Bewusstsein mit aufleuchten kann, ist von höherer Art als die natürlich gegebene Weise, sich zu sich selbst und der Welt in ein Verhältnis zu setzen. In der Involution führt die zweite Spiegelung nicht noch weiter vom Ausgangsgebilde weg als die erste, sondern sie führt wieder zu ihm zurück. Geht man davon aus, dass sich hier in zunächst noch abstrakte Form eine solche höhere Fähigkeit ankündigt, so darf man auch annehmen, das die Ausbildung derselben zu einer Harmonisierung der Verhältnisse zwischen Mensch und Mensch sowie zwischen Mensch und Natur führen kann.[4] Denn wenn man sich selbst so begegnet, dass man dabei den eigenen Ausgangspunkt und den von dort

---

[2] Die Erklärung dafür, dass in den vorhergehenden Abbildungen 63 bis 65 in der Unendlichkeit etwas vorliegt, was der in 66 u. 67 sichtbaren Dornspitze entspricht, ist ein wenig kompliziert. Man findet sie bei Locher, 2016a, Kap. 3: Die Singularitäten eines elementaren Bogens.

[3] Bernard, 1999, Kap. 5: Begegnung einer Kreiswelle mit einer Frontwelle

[4] Jörg Ewertowsky schliesst sein ausserordentlich aufschlussreiches Buch über die Bewusstseinsseele, die Seelenverfassung, die seit Beginn der Neuzeit in Entwicklung begriffen ist, mit einem Hinweis auf die projektive Geometrie ab. Siehe Ewertowsky, 2007

Renatus Ziegler verfolgt die Idee, Probleme, die sich in der Geometrie ergeben mit solchen philosophischer Art, parallel zu bearbeiten, in einem umfangreichen Werk, das einen Schwerpunkt auf die projektive Geometrie legt, anhand von prägnanten Beispielen vom Altertum bis zur Gegenwart. Siehe Ziegler 2000 aus gegangenen Weg kennen lernt, so beginnt man auch, die eigenen Aufgaben zu entdecken und zu verstehen und es kann sich so die Möglichkeit ergeben, sinnstiftend innerhalb des eigenen Schicksalshorizontes tätig zu werden.[5] Im Sinne des in dieser Schrift entwickelten Raumbegriffes findet ein solches Kennenlernen in der dritten Dimension (Erkenntnisstufe) statt.

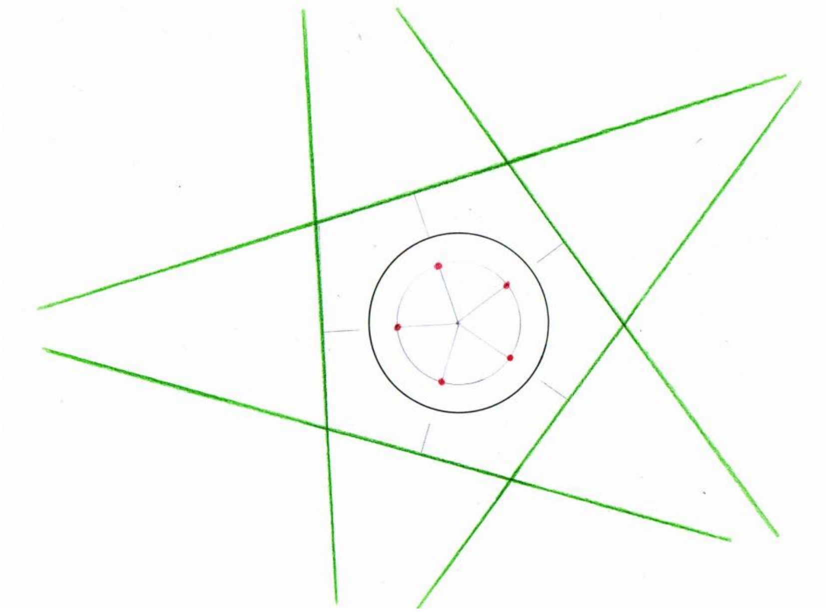


Abb. 58

[5] Die aus der Schulgeometrie bekannten Achsen- und Punktspiegelungen haben ebenfalls die Eigenschaft, dass ein gespiegelter Punkt wieder in seinen Ausgangspunkt zurück fällt, wenn er nochmals an derselben Achse, bzw. demselben Punkt gespiegelt wird. Man kann solche Spiegelungen handhaben, ohne sich zu verdeutlichen, dass der unendlich ferne Punkt, der auf der Verbindungsgeraden der beiden Punkte liegt, die Mitte zwischen ihnen in Bezug auf das spiegelnde Element (Punkt, bzw. Schnittpunkt der Verbindungsgerade mit der Achse) bildet. Man kommt mit dieser Art der Handhabung aber noch nicht an den eigenen Ausgangspunkt zurück, denn man hebt das Verhältnis der vollzogenen Spiegelung zur Unendlichkeit und damit im eigentlichen Sinne auch erst zur Endlichkeit nicht ins Bewusstsein.

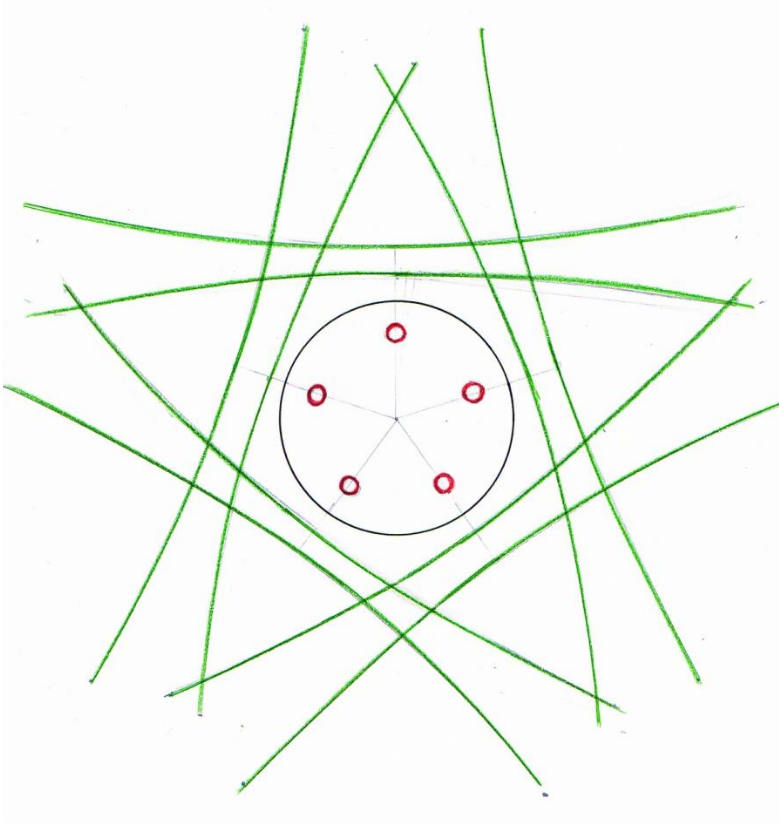
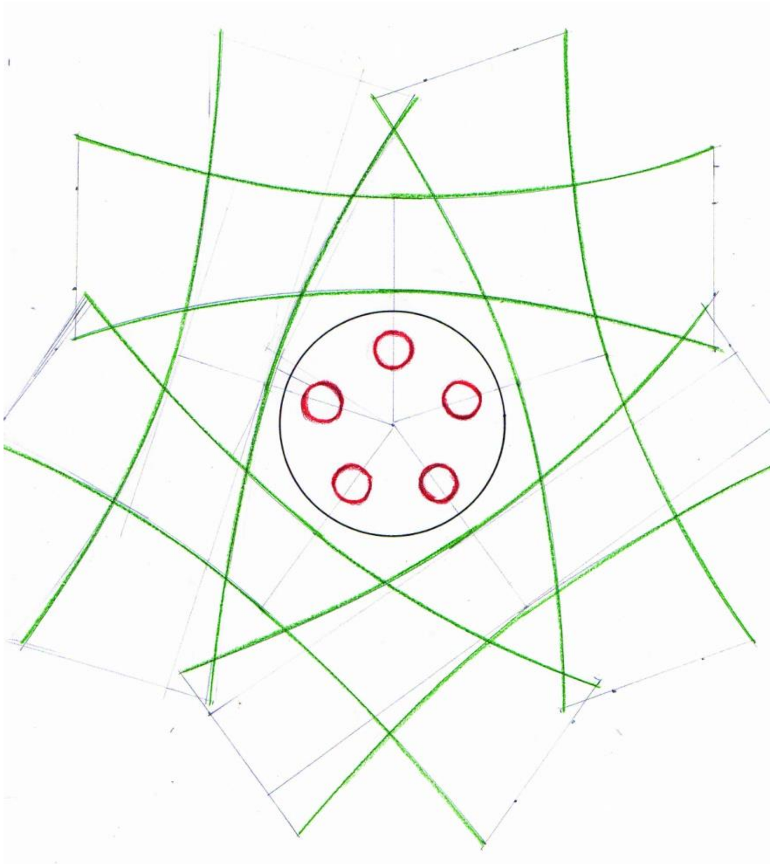


Abb. 59



Ab. 60

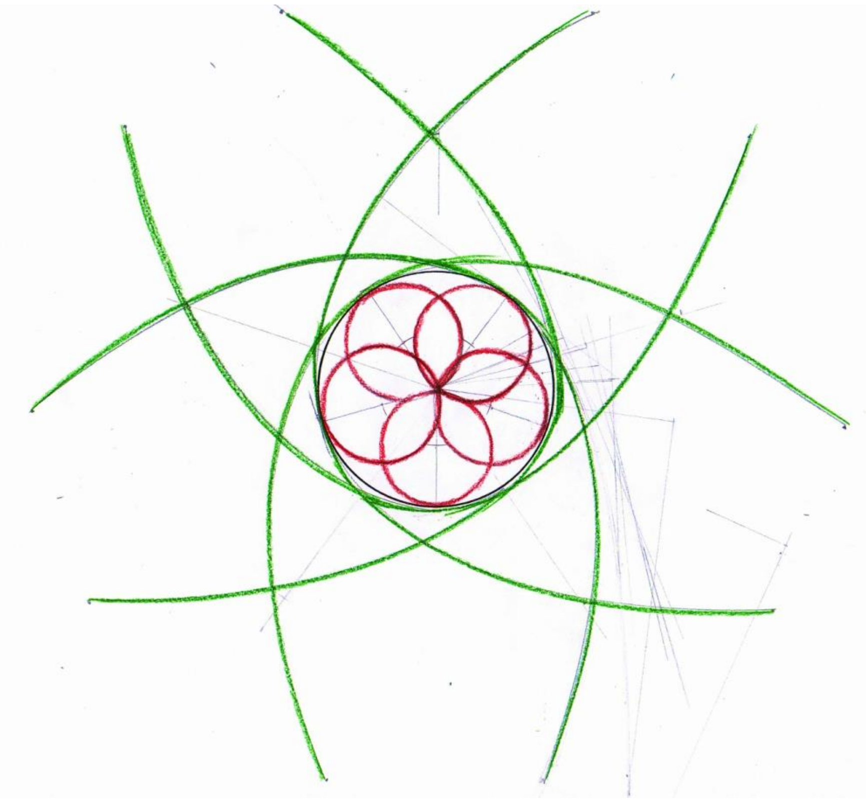


Abb. 61

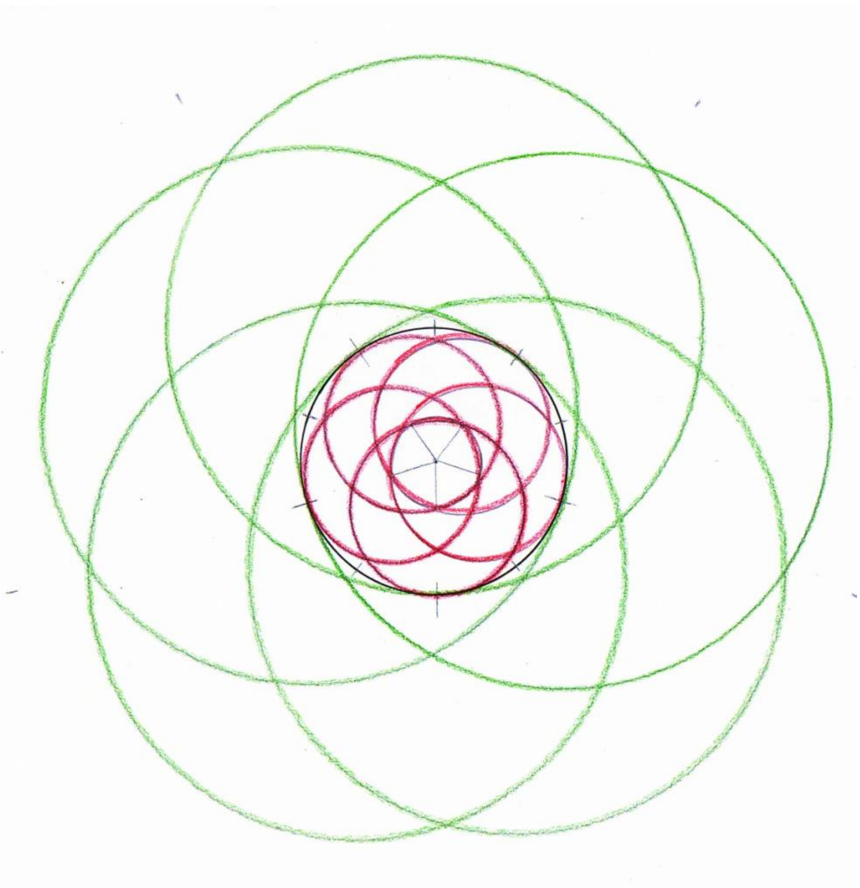


Abb. 62

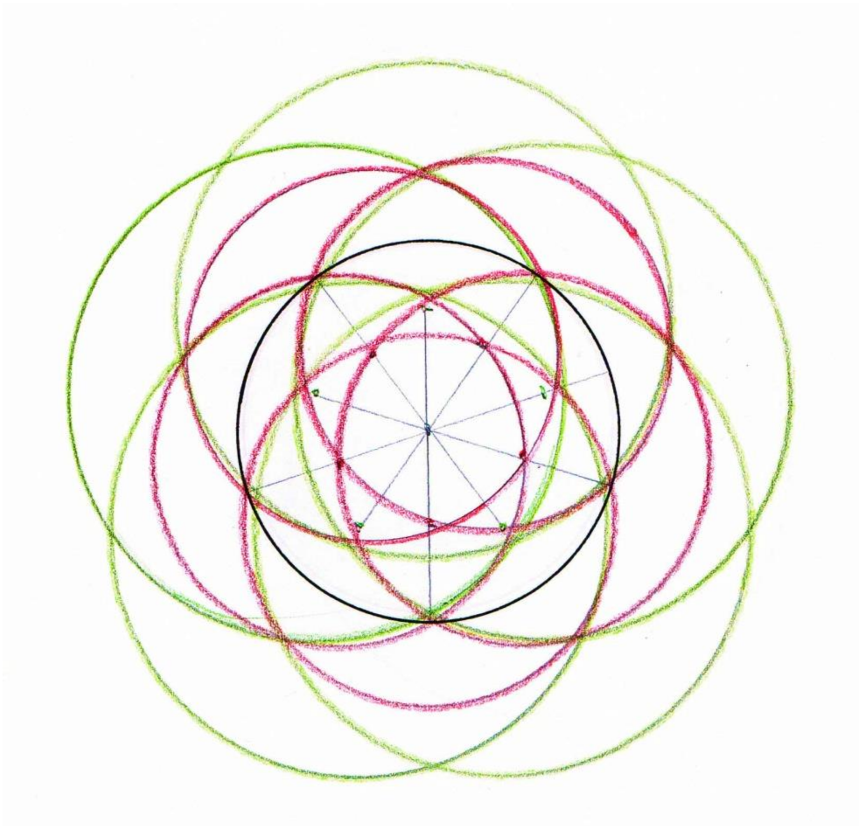


Abb. 63

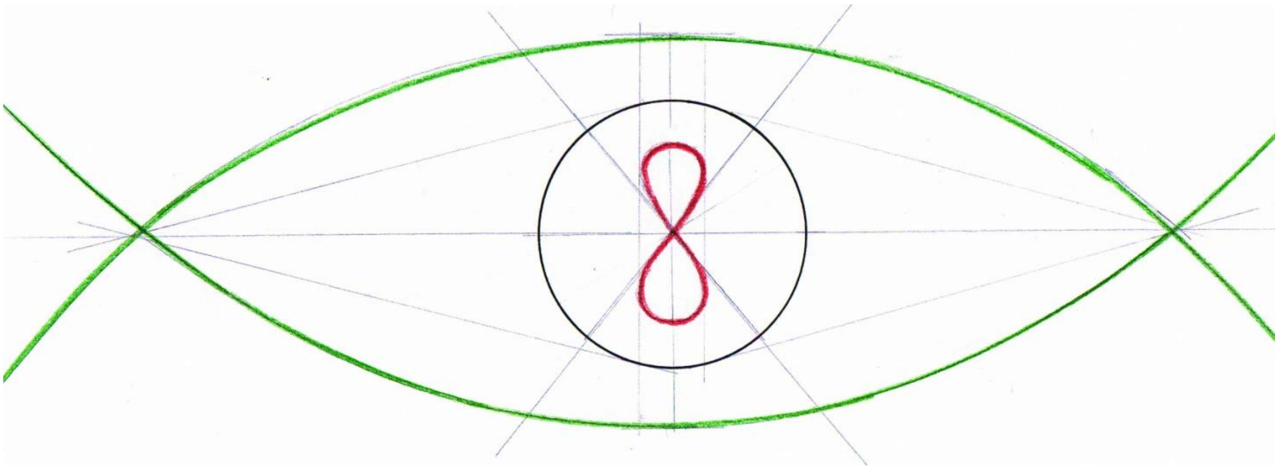


Abb. 64

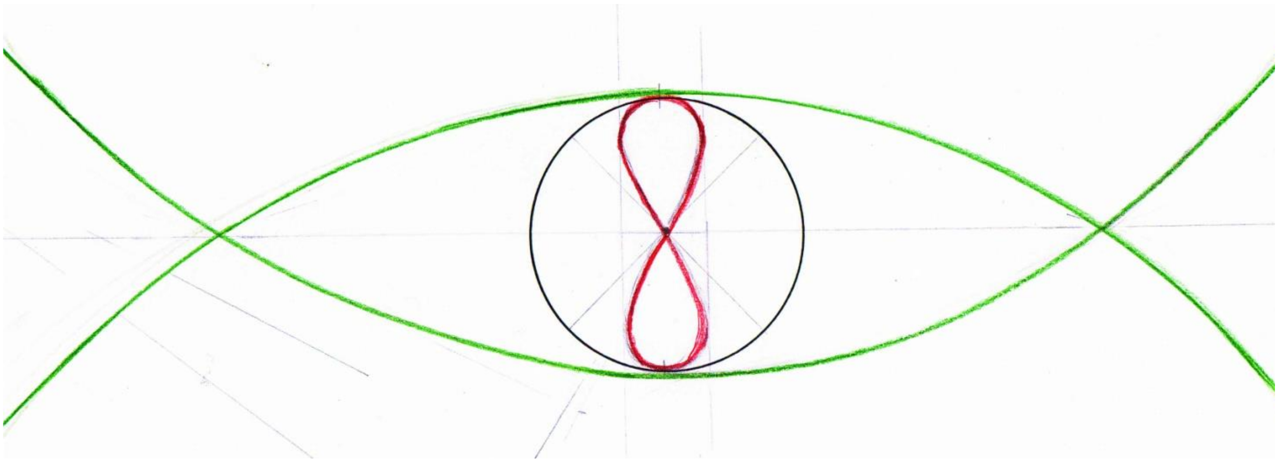


Abb. 65

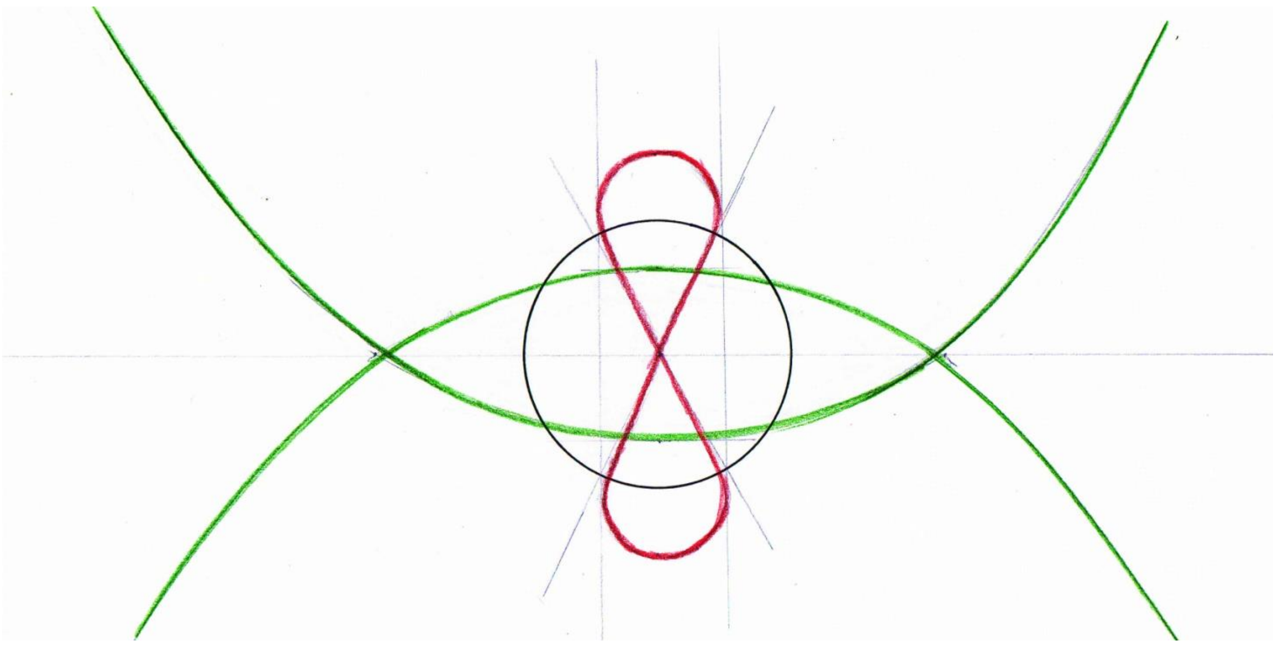


Abb. 66

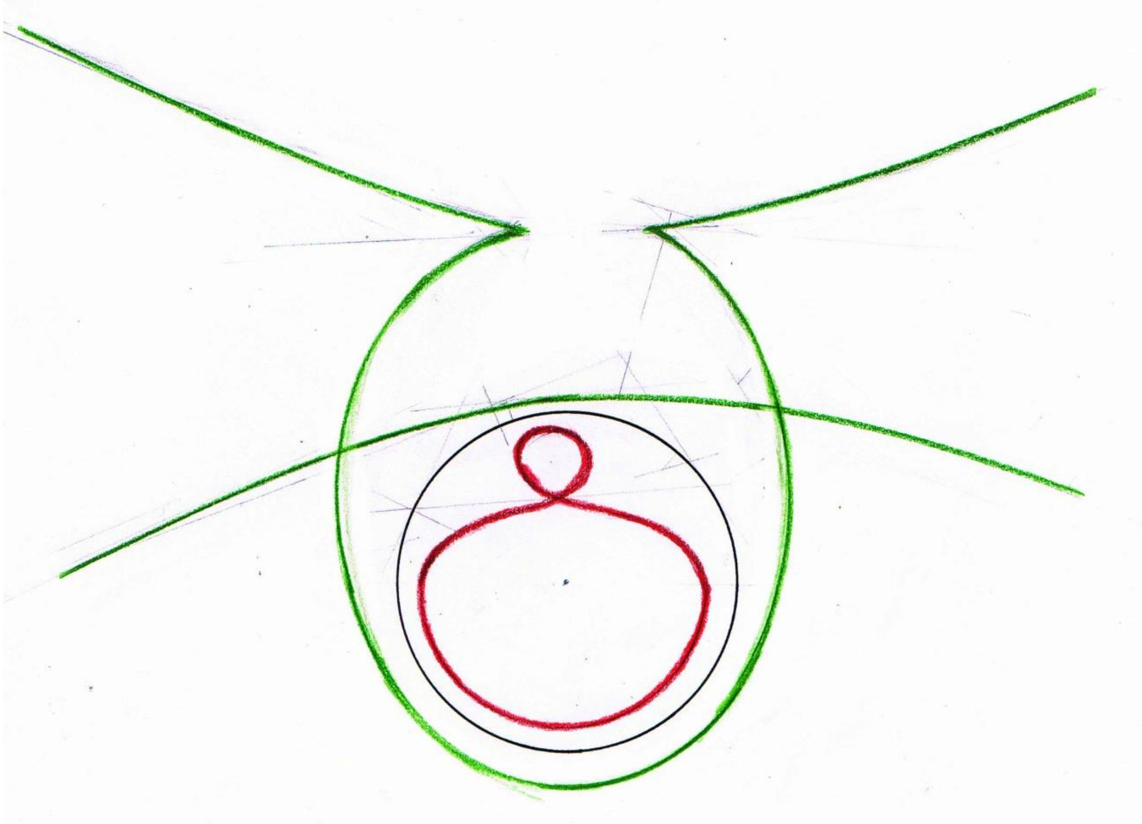


Abb. 67

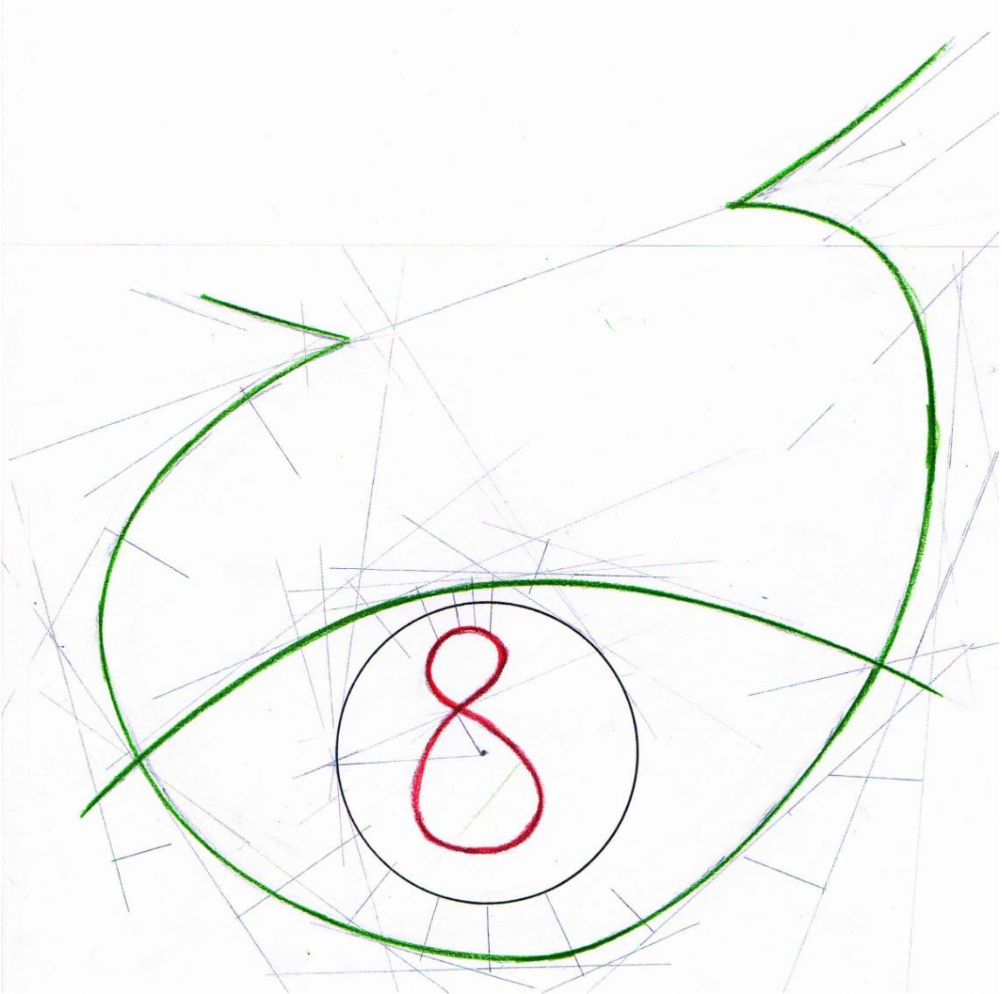


Abb. 68

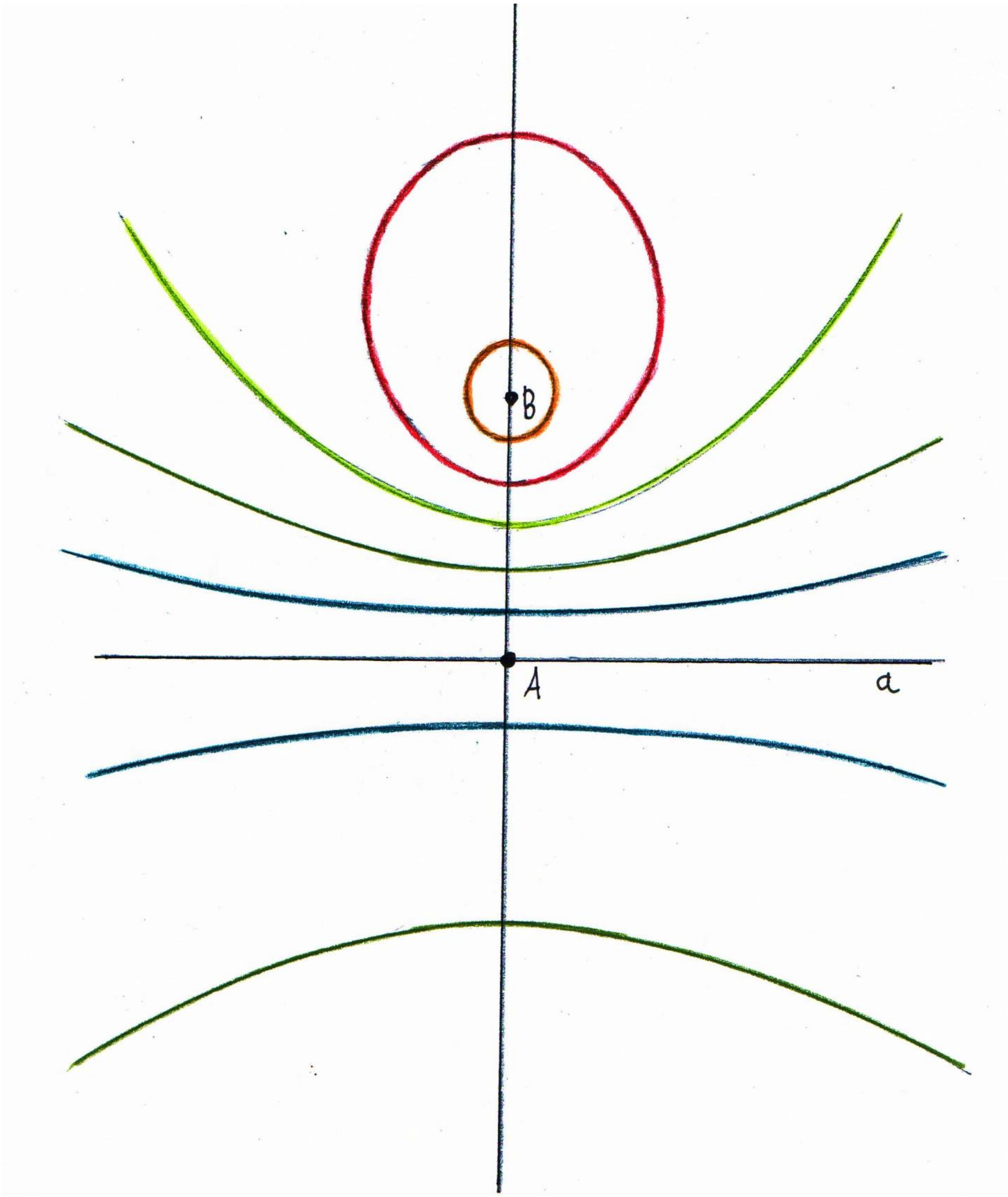


Abb. 69