Projektive Massbestimmungen

Schrittmass

Wie bestimmt man gleiche Abstände, ohne ein starres Mass anzulegen? Für Zwecke des praktischen Lebens ist das Messen von Entfernungen aller Art notwendig und hilfreich. Beim Messen stellt man immer ein Verhältnis her, man benutzt einen bestimmten Massstab, seien es Meter, Kilometer oder andere Grössen. In Bezug auf die zugrunde gelegte Einheit ist ein Weg so und so lang. Eine absolute Entfernung kann man nicht angeben, sie ist immer durch Vergleich ermittelt. Um meinen Vorgarten zu durchschreiten brauche ich eine bestimmte Anzahl von Schritten von bestimmter Länge, ich kann den Weg auch in Metern angeben, Die Entfernung von Basel nach Bern beträgt rund 95 Kilometer. Bei sehr grossen Distanzen nimmt man unter Umständen die Lichtgeschwindigkeit zu Hilfe, also eine Einheit, die selbst wiederum in einem komplizierten Messverfahren zustande gekommen ist. Überhaupt ist das Festlegen von Masseinheiten keine einfache Sache, die Einführung des Meters als einer vom menschlichen Leib unabhängigen Längeneinheit war mit verschiedenen Erwägungen bezüglich des Erdumfangs verbunden. Zuvor hat man z. B. in Ellen oder Fuss gemessen. Wenn man, wie es in der projektiven Geometrie geschieht, die Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen unabhängig von den jeweiligen Entfernungen betrachtet, so sieht man sie als übergeordnete Qualitäten an. Das Festlegen einer Strecke von einer bestimmten Länge ist demgegenüber etwas Abgeleitetes. Nun lehrt die tägliche Erfahrung den Unterschied zwischen Gleichheit und Ungleichheit ins Auge zu fassen. Ein Weg ist kürzer oder länger als ein anderer. Gibt es die Möglichkeit, einen solchen Unterschied auch in der qualitativen Sphäre der Lagebeziehungen festzumachen?

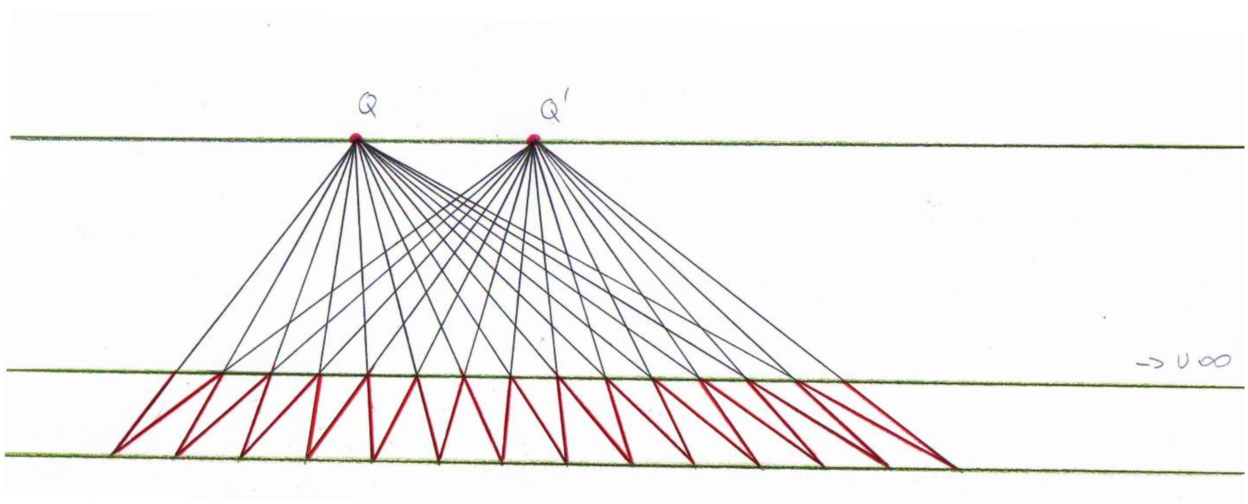

Abbildung 1a

Anders gefragt: Ist es möglich, lediglich durch das hin und her projizieren von Elementen gleiche Abstände zu erzeugen.[1] Wir versuchen es mit Punkten. Man zeichne drei parallele Geraden auf ein

[1] Zum Thema der projektiven Massbestimmungen vgl z. B.
Bernhard 1984, Kap.14
Whicher 1970, Kap. VI
Locher-Ernst 1988, Kap. 21
Edwards 1986, Kap. 3

Blatt. Der Schnittpunkt dieser drei Geraden ist ihr gemeinsamer unendlich ferner Punkt U. Auf der oberen der Geraden wählt man willkürlich zwei Punkte Q und Q' (Abbildung 1a). Nun wählt man eine beliebige Gerade, die vom Punkt Q aus die beiden unteren Geraden schneidet. Den Schnittpunkt mit der unteren Geraden verbindet man mit Q'. Dabei entstehen zwei Schnittpunkte auf der mittleren Geraden. Durch diese ist nun das weitere Vorgehen festgelegt. Die nächste Gerade, die ich von Q aus lege, muss durch den Schnittpunkt gehen, der nicht mit Q sondern mit Q' verbunden ist. Ich kann den Vorgang auch ausgehend von Q' weiterführen. Dann muss ich die nächste Gerade durch den Schnittpunkt legen, der noch nicht mit Q' sondern mit Q verbunden ist. So ergibt sich ein rhythmischer Prozess des hin und her Projizierens von Punkten zwischen den beiden unteren Geraden, den man in beide Richtungen beliebig fortsetzen kann. Die Punkte schreiten, je nachdem, ob man von Q oder von Q' ausgeht, nach rechts oder nach links in gleichen Abständen vorwärts, wobei auf der unteren Geraden die Schritte ein wenig grösser sind als auf der oberen. Das so entstandene Mass nennt sich – aus naheliegenden Gründen – Schrittmass. Wir haben gleiche Schritte erzeugt, ohne den Prozess des Abmessens zu verwenden. Man kann mit dem Abstand der drei Geraden sowie mit dem Abstand der beiden Punkte Q und Q' spielen und so verschiedene Schrittgrössen erzeugen. Für diesen Projektionsvorgang ist nun allerdings nicht die parallele Lage der drei Geraden entscheidend, sondern die Tatsache, dass sich alle drei in einem Punkt U schneiden. Die Einführung des Schrittmasses anhand von parallelen Geraden bietet sich wegen der Übersichtlichkeit an.

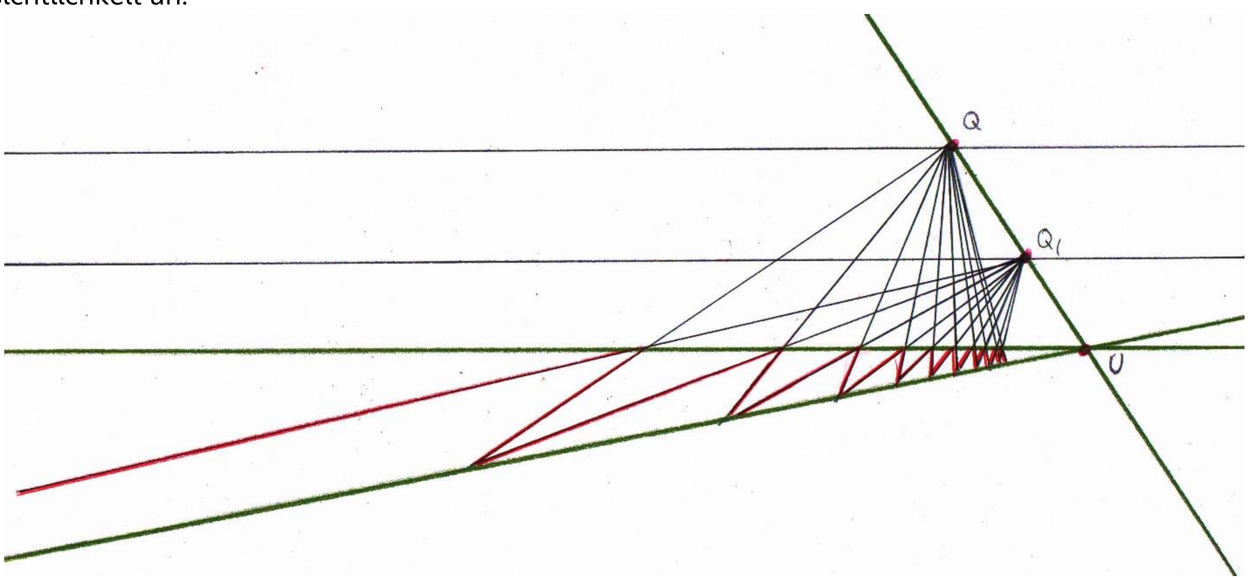

Abbildung 1b

Ich kann die gleiche Art von Konstruktion so ausführen, dass der Schnittpunkt der drei Geraden auf dem Blatt liegt. Natürlich liegen diese dann nicht mehr parallel, wie man in Abbildung 1b sieht. Wiederum werden Punkte zwischen zwei Geraden hin und her projiziert, aber jetzt sind die erzeugten Abstände für unsere Anschauung nicht mehr gleich. Was nun noch gleich bleibt, ist der Prozess, aus dem sie hervorgegangen sind. Von Q oder Q' ausgehend werden Punkte in stets gleicher Art zwischen zwei Geraden hin und her projiziert. Gegen den Punkt U hin werden die Abstände immer kleiner, in die andere Richtung immer grösser. Auch hier ist der Vorgang grundsätzlich nach beiden Seiten hin unbegrenzt fortsetzbar, in den Punkt U komme ich nie hinein, ich komme gedanklich beliebig nahe an ihn heran, zeichnerisch ist dem weiteren Fortschreiten irgend-

Edwards 2015, Kap. 7 u. 8

wann durch die Strichdicke ein Ende gesetzt. Der Punkt U wirkt also in dieser Konstruktion, obwohl er auf dem Blatt liegt, als funktionelle Unendlichkeit, die in abzählbar vielen Projektionsschritten nicht zu erreichen ist. Genau dasselbe gilt für den unendlich fern liegenden Punkt U in Abbildung 1a. Auch zu diesem kann ich durch noch so viele Schritte nicht gelangen. Auch wenn ich grundsätzlich in der Anzahl der ausführbaren Schritte nicht begrenzt bin, so bleiben diese doch abzählbar und damit verbleibe ich im Bereich des Messbaren. Der unendlich ferne Punkt einer Geraden hat aber die paradoxe Eigenschaft, von jedem anderen auf dieser Geraden liegenden Punkt gleich weit, nämlich unendlich weit, entfernt zu sein. Er entzieht sich so der Möglichkeit der Verortung durch die Angabe von Abständen oder Entfernungen. Andererseits wirkt die Existenz dieses Punktes offenbar ordnend in die Endlichkeit hinein, denn dass die stets gleichen Projektionsschritte auch zu messbar gleichen Abständen führen, haben wir offensichtlich der Tatsache zu verdanken, dass der Punkt U unendlich fern liegt.

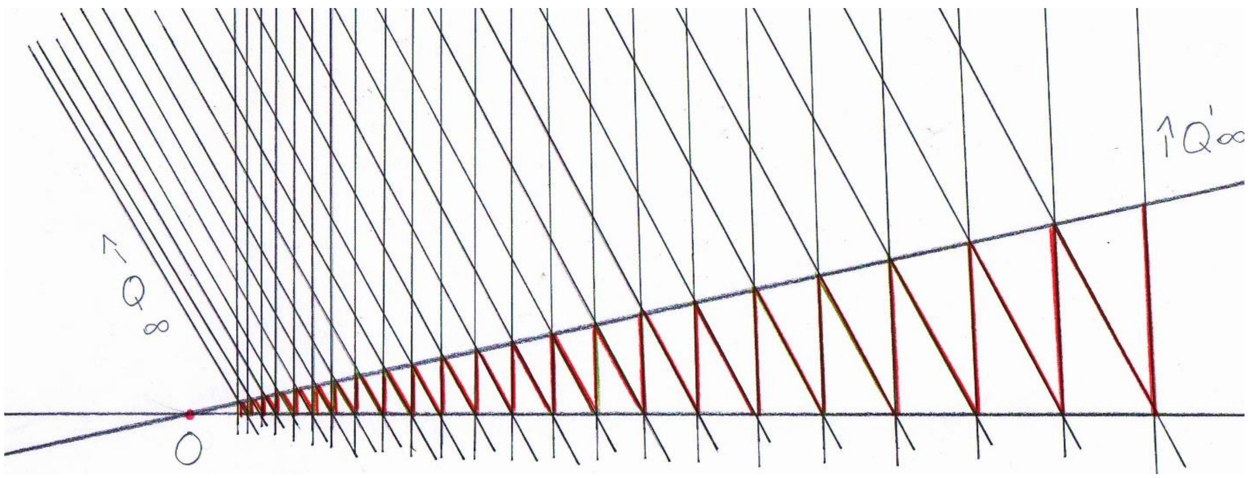

Abbildung 2a

Wachstumsmass

Ich kann die Konstruktion dahingehend verändern, dass der Schnittpunkt der Geraden, auf der die Punkte Q und Q' liegen mit den beiden Geraden, zwischen denen hin und her projiziert wird, beliebig liegt. Dann werden sich die drei Geraden nicht in einem Punkt treffen. Die Gerade, auf der die beiden Zentren Q und Q' liegen, trifft die untere im Punkt U, die beiden anderen Geraden schneiden sich im Punkt O. Wiederum ist diese Konstruktion zunächst leichter zu überschauen, wenn man dem Punkt U eine unendlich ferne Lage gibt In Abbildung 2a sind die Punkte Q und Q' ebenfalls in die Unendlichkeit gerückt. Sie liegen nun gemeinsam mit U auf der Ferngerade der Zeichenebene. Der Vorgang des Projizierens ist jedoch gleichartig mit dem zuvor beschriebenen. Von Q werden Punkte auf die untere Gerade geschickt und von dort mit Q' verbunden. Da die beiden Punkte unendlich ferne Lage haben, liegen die von ihnen ausgehenden Strahlen stets parallel. Durch wiederholtes Projizieren werden auf den beiden unteren Geraden gleichmässig wachsende Abstände hergestellt. Man könnte diese auch dadurch erzeugen, dass man ausgehend von einem bestimmten Abstand diesen von Schritt zu Schritt stets mit dem gleichen Faktor multipliziert. Einem solchen Mass liegt nun nicht mehr wie beim Schrittmass die Addition, sondern die Multiplikation zugrunde. Man bezeichnet es als Wachstumsmass. Aus der Schulgeometrie kannt man vielleicht noch die zentrische Streckung, mit deren Hilfe man geometrische Formen gleichmässig vergrössern oder verkleinern kann. Im vorliegenden Fall wurde der Streckfaktor nicht zahlenmässig bestimmt, sondern er ergibt sich geometrisch durch die Projektion. Man könnte ihn nachträglich durch Ausmessen ermitteln. Auch diese Konstruktion lässt sich dahingehend abändern, dass der Punkt U und damit die Gerade, auf der Q, Q' und U liegen, auf dem Blatt erscheinen (s. Abbildung 2b) Die untere waagrecht liegende Gerade ist nun durch die Punkte O und U in zwei Segmente unterteilt. Betrachten wir zuerst das ganz in der Endlichkeit liegende Segment, so bemerken wir eine Stauung der Punkte gegen O und U hin. Entfernen sich die Punkte von O und U, so werden die Abstände weiter. Dasselbe gilt für das durch die Unendlichkeit laufende Segment. In Abbildung 2c sind durch den gewählten Ausschnitt die Verhältnisse nochmals deutlicher zu überschauen. Man sieht hier, wie sich von beiden Seiten kommend, die Punkte gegen U bzw. gegen O hin stauen. Die Punkte U und O stellen hier zwei voneinander verschiedene funktionelle Unendlichkeiten dar. Dass diese für die vorliegende Konstruktion unerreichbar sind, kann man sich klarmachen, wenn man sich vorstellt (oder es auch zeichnerisch ausführt), man würde von Q aus je einen Strahl direkt in die Punkt U und O schicken und diesen dann mit Q' verbinden. Das kann man zwar tun, dadurch kommt aber kein Projektionsprozess zustande. Die so erzeugten Strahlen stehen isoliert in dem ganzen Vorgang und können die Bewegung nicht in Gang setzen. Jeder andere, beliebig gewählte Strahl ist in der Lage, dies zu tun. Man kann die Projektion im Wachstumsmass als den allgemeineren Fall ansehen – die drei benötigten Linien liegen irgendwie – während das Schrittmass einen Spezialfall darstellt – die drei benötigten Linien schneiden sich in einem Punkt.

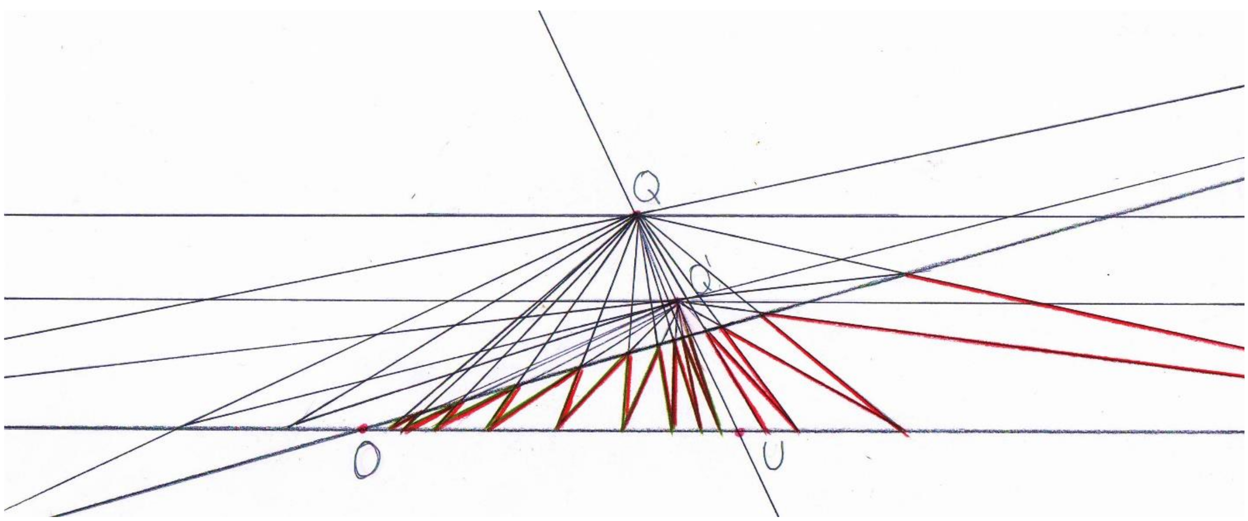

Abbildung 2b

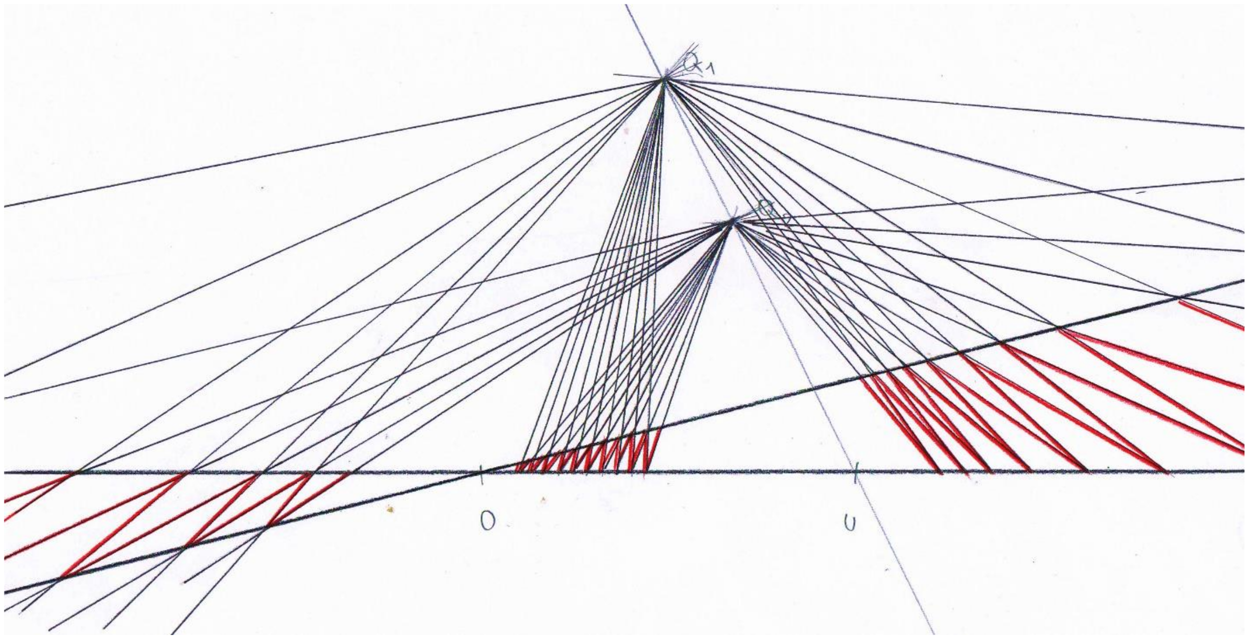

Abbildung 2c

Vielleicht bereitet es Schwierigkeiten, einzusehen, warum man in beiden Fällen von Wachstumsmass sprechen kann, denn wenn die Punkte, zwischen denen sich die Projektion entfaltet, auf dem Blatt liegen, hat man ja offensichtlich keine zentrische Streckung. Die dennoch enge Verwandtschaft der einen mit der anderen Form kann man auf folgende Weise zeigen (s. Abbildung 2d): Man verwandelt ein beliebiges Wachstumsmass mit zwei auf dem Blatt liegenden Fixpunkten durch Projektion in ein solches, dass einen Fixpunkt in der Unendlichkeit liegen hat. Hierzu verwendet man ein bereits konstruiertes Wachstumsmass auf einer Geraden zwischen den beiden Punkten O und U. In Abbildung 2d ist dies die waagrecht liegende Gerade. Durch den Punkt O zieht man nun eine beliebige Gerade und durch den Punkt U eine weitere, die zu dieser parallel liegt. Auf dieser Geraden wählt man einen Projektionspunkt P und von diesem aus projiziert man die zwischen O und U liegenden Punkte auf die obere Gerade. Man sieht sogleich, dass die Punkte auf den beiden Geraden, die sich in O schneiden, perspektiv zueinander sind. Der Punkt O entspricht sich selbst und der Punkt U wird in die unendlich ferne Lage projiziert. Auf diese Weise kann man leicht einsehen, dass es berechtigt ist, den gleichen Namen zu verwenden, unabhängig davon, ob einer der Punkte in der Unendlichkeit liegt oder nicht. Beide Konstruktionen entstehen nicht nur durch den gleichen Prozess, sie lassen sich auch leicht ineinander überführen. Betrachtet man die Abstände zwischen Punkten auf der oberen Geraden, so stellt man fest, dass zwei aufeinander folgende Strecken stets das gleiche Verhältnis zueinander haben. Dies entspricht genau den Verhältnissen bei dem in Abbildung 2a betrachteten Wachstumsmass. Wir stehen hier vor der erstaunlichen Tatsache, dass wir durch den Projektionsprozess metrisch geordnete Verhältnisse erzeugt haben, ohne dass wir bei der Anlage der Zeichnung von irgendwelchen Massverhältnissen ausgegangen sind. Wir sehen, dass es möglich ist, durch geeignete Projektion jedes beliebige Wachstumsmass in ein solches zu verwandeln, das durch eine zentrische Streckung gekennzeichnet ist. Man muss dazu lediglich einen der beiden Fixpunkte O oder U in die Unendlichkeit projizieren.[2]

[2] Lawrence Edwards weist darauf hin, dass das Wachstumsmass mit zwei im Endlichen sichtbaren, funktionell unendlich fernen Punkten als eine perspektivische Sicht auf eine geometrische Folge betrachtet werden kann.

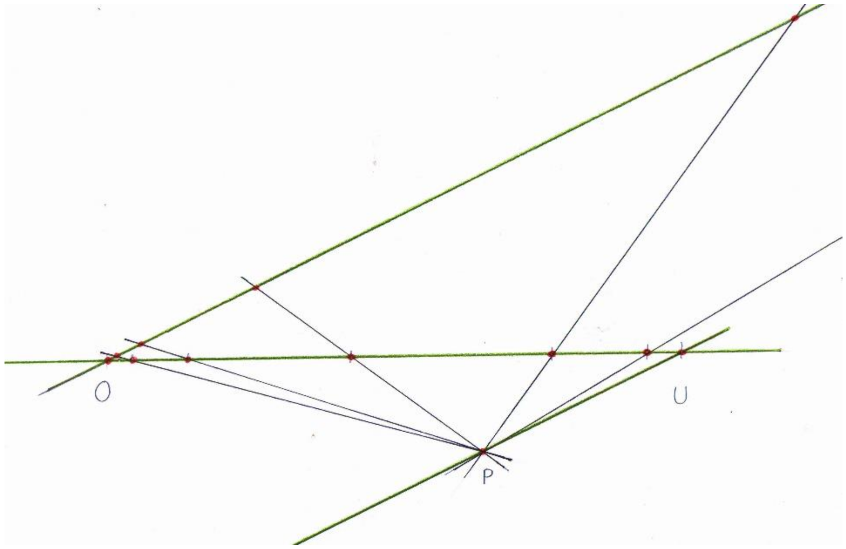

Abbildung 2d

Massbestimmungen am Kegelschnitt

Es gibt die Möglichkeit, Schrittmass, Wachstumsmass und eine weitere projektive Massbestimmung, das kreisende Mass, mit Hilfe von Kegelschnitten zu erzeugen. Um ein Schrittmass zu erhalten, legt man eine Tangente an einen Kegelschnitt. Auf dem Kegelschnitt wählt man zwei beliebige Punkte, hier mit O und O' bezeichnet. Von O ausgehend schickt man Geraden auf die Tangente, die man von dort nach O' zurückprojiziert. Durch diesen Vorgang erhält man zwei Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt, durch die das weitere Vorgehen bestimmt ist. Der nächste Strahl, der von O ausgeht, muss durch den Schnittpunkt laufen, der nicht mit O verbunden ist. Der Vorgang entspricht dem, den wir bereits bei der Betrachtung des Schrittmasses kennengelernt haben. Abbildung 3a zeigt das entstehende Schrittmass am Kreis, Abbildung 3b an der Ellipse.

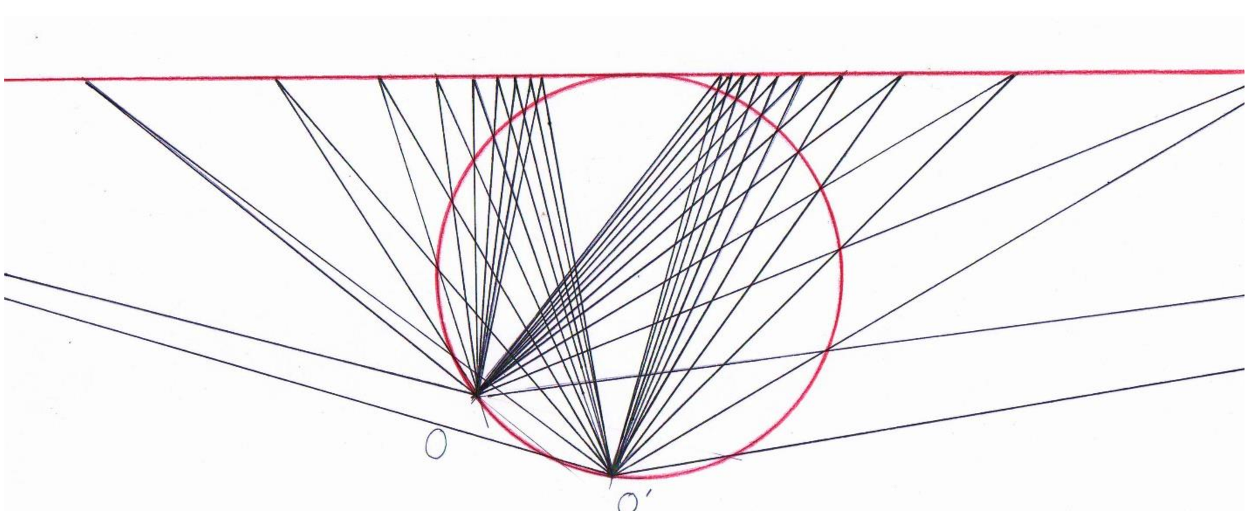

Abbildung 3a

Ferner zeigt er auf, dass das Doppelverhältnis von vier aufeinander folgenden Punkten, entsprechend gefasst, dem Multiplikationsfaktor der Folge entspricht. Vgl. Edwards 2015, Chapter 7: Growth measure.

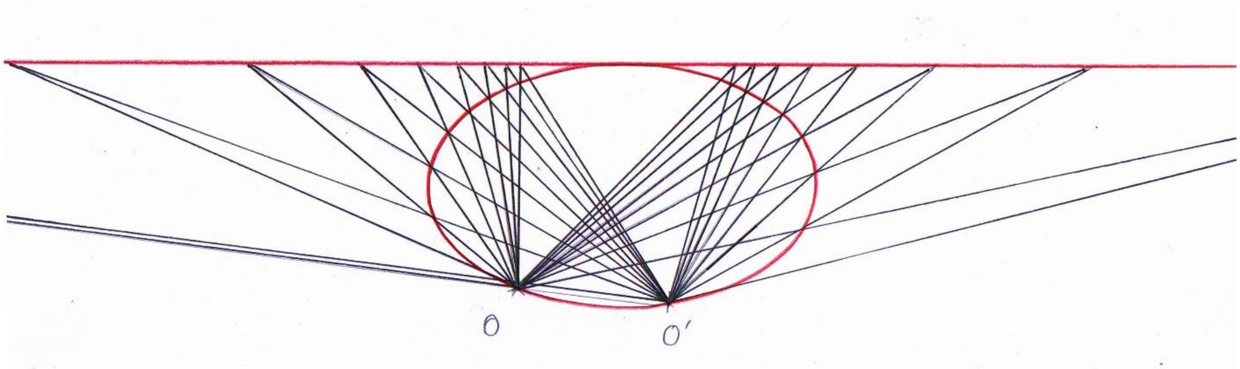

Abbildung 3b

Interessanterweise entsteht durch den Projektionsvorgang das Schrittmass sowohl auf der Tangente als auch auf dem Kegelschnitt selber. Der Berührpunkt der Tangente mit dem Kreis entspricht dem Punkt, den wir zuvor als U bezeichnet haben. Gegen diesen Punkt hin stauen sich sowohl die Punkte auf der Tangente als auch auf dem Kegelschnitt. Er wirkt also wiederum als funktionell unendlich ferner Punkt, den ich durch die Konstruktion nicht erreichen kann. Hingegen ist das Überschreiten des unendlich fernen Punktes der Tangente konstruktiv kein Problem. Gegebenenfalls hilft eine Verlängerung des Lineals oder ein Anfügen eines weiteren Blattes. Auch hier ist das Schrittmass wiederum ein Spezialfall, denn eine Gerade, die mit einem Kegelschnitt in einer Ebene liegt, kann zwar dessen Tangente sein, häufiger sind aber die zwei anderen möglichen Fälle: die Gerade kann den Kegelschnitt entweder in zwei Punkten schneiden oder keinen gemeinsamen Punkt mit ihm haben. Im ersten Fall entsteht Wachstumsmass (siehe Abbildungen 4a und 4b). Die für uns wichtigen Punkte sind nun die beiden Schnittpunkte der Geraden mit dem Kegelschnitt. Wir wählen zwei Punkte O und O′ wie vorher und führen die gleiche Art der Konstruktion aus. Es zeigt sich, dass sich sowohl die Punkte auf der Geraden als auch die auf dem Kegelschnitt gegen die beiden Schnittpunkte hin stauen. Wie vorher beim Wachstumsmass beschrieben, hat man also auch hier zwei funktionell unendlich liegende Punkte. Wiederum kann man die Schnittpunkte so betrachten, dass in ihnen der Projektionsprozess zum Stillstand kommt, während jeder andere Strahl, der von O oder von O′ aus auf die den Kegelschnitt schneidende Gerade geschickt wird, den Prozess in Gang setzt. Wir sehen hier nochmals deutlicher, wovon die Charakteristik des Masses als gleichbleibend oder wachsend abhängt: gibt es zwei für die Konstruktion unerreichbare Punkte, zwischen denen die Bewegung stattfindet, entsteht Wachstumsmass, gibt es nur einen solchen, so entsteht Schrittmass.

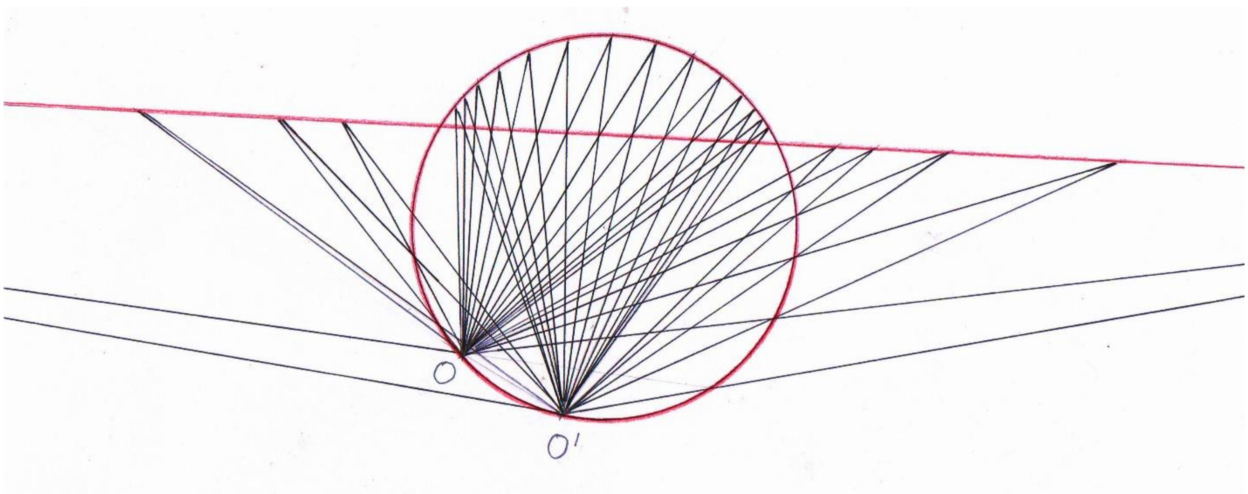

Abbildung 4a

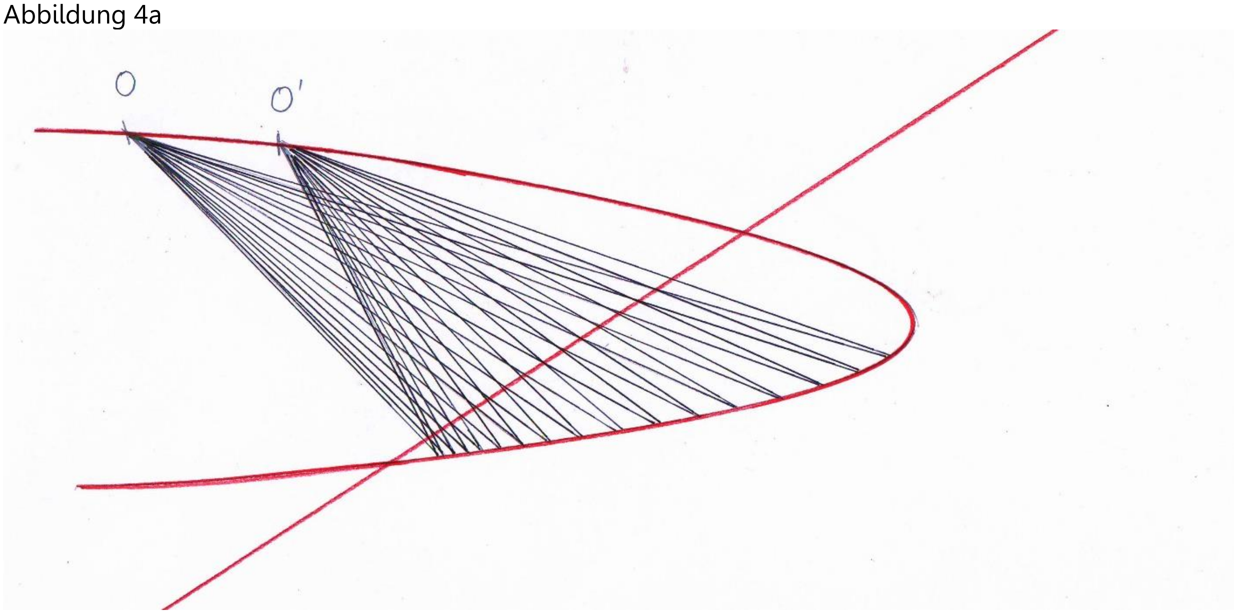

Abbildung 4b

Die grundsätzliche Beschaffenheit des Masses ist nicht davon abhängig, ob ich von einer Geraden auf eine weitere projiziere oder ob die Projektion von einem beliebigen Kegelschnitt ausgeht. Die Betrachtung der Kegelschnitte macht uns aber auf eine weitere Möglichkeit aufmerksam, die man, wenn man nur zwischen Geraden hin und her projiziert, unter Umständen übersehen könnte. Denn eine Gerade, die mit einem Kegelschnitt in derselben Ebene liegt, wird häufig so liegen, dass sie ihn weder schneidet noch berührt. Betrachten wir die Abbildungen 5a und 5b. Hier sind genau dieselben vorher beschriebenen Projektionen ausgeführt. Jeder Strahl, der von O bzw. O′ ausgeht, erzeugt einen Schnittpunkt auf dem Kegelschnitt sowie auf der Geraden. Betrachten wir zuerst die Punkte, die sich auf der Geraden ergeben. Man sieht eine Bewegung, in der die Abstände zwischen den Punkten, zuerst weit sind, dann enger werden und schliesslich wieder weiter. Dort, wo sich Kegelschnitt und Kreis nahekommen, sind die Abstände enger, dort, wo sie weiter von einander entfernt sind, werden auch die Abstände zwischen den erzeugten Punkten grösser. Betrachten wir die Schnittpunkte auf dem Kegelschnitt selbst, so ergibt sich ein vergleichbares Bild: Punkte, die weit von O und O′ entfernt liegen, sind näher beieinander, Punkte, die näher bei O oder O′ liegen sind weiter voneinander entfernt. Diese Bewegung könnte man ewig weiterführen, das Kreisen der

Punkte auf der Geraden und auf dem Kegelschnitt würde nicht aufhören. In den allermeisten Fällen wird ein Punkt die Gerade oder den Kegelschnitt wiederholt durchlaufen können, ohne mit einem bereits vorhandenen Punkt zusammenzufallen. Diese Bewegung kommt sozusagen nicht zum Stillstand.

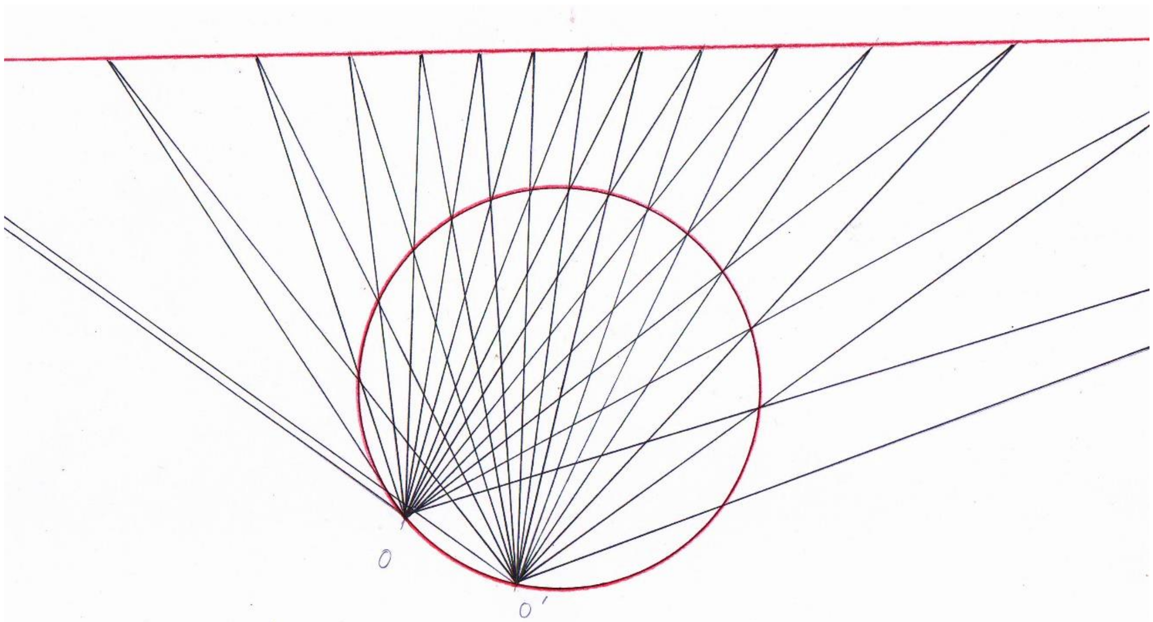

Abbildung 5a

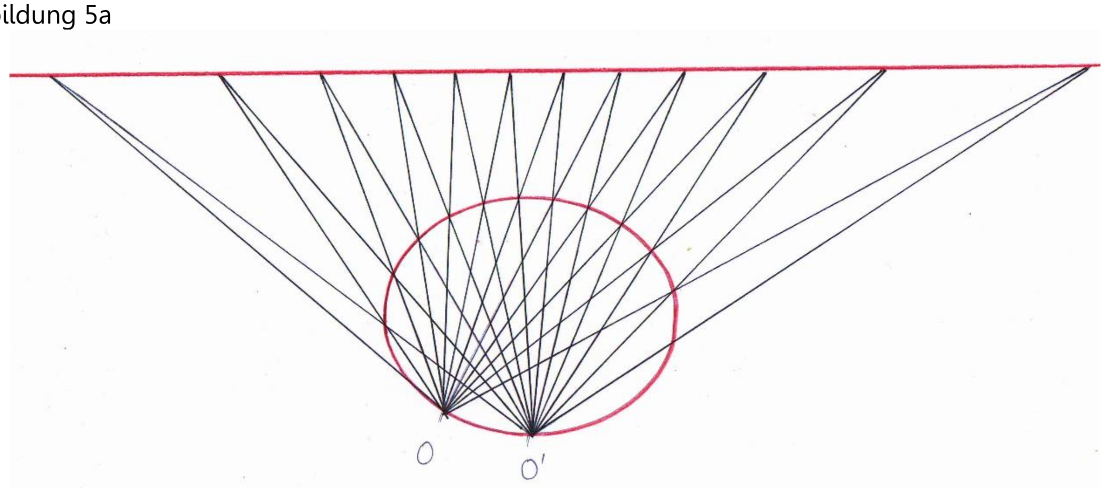

Abbildung 5b

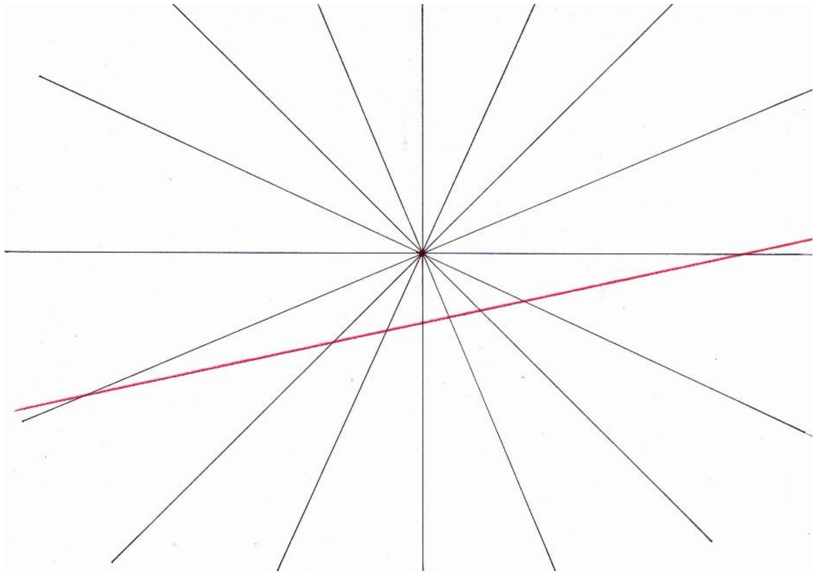

Abbildung 6

Im Kapitel über die Fernelemente hatten wir bereits die Schnittpunkte, die ein Strahlenbüschel auf einer Geraden erzeugt, betrachtet. Wir hatten die Bewegung dieser Punkte verfolgt, um uns die Existenz eines unendlich fernen Punktes auf der überstrichenen Geraden klarzumachen. Betrachten wir diese Punkte nochmals mit Hilfe von Abbildung 6. Schaut man auf die Abstände der Punkte zueinander, so bemerkt man, dass diese nahe an dem senkrecht vom Strahlenbüschel ausgehenden Strahl eng sind, um dann in beide Richtungen weiter zu werden. Die Bewegungsgebärde entspricht also genau derjenigen des kreisenden Masses, nur mit dem Unterschied, dass hier, bedingt durch die gleichmässige Anordnung der Strahlen im Büschel nach einer bestimmten Anzahl von Drehbewegungen derselbe Punkt nochmals getroffen wird. Würde man den Strahl um einen völlig beliebigen Winkel drehen, so würde auch hier ein unaufhörliches Kreisen entstehen, das kaum einen einmal getroffenen Punkt nochmals treffen würde. Strahlen, die in einem Punkt gedreht werden, erzeugen also ebenfalls ein kreisendes Mass auf einer Geraden. Fasst man diese Betrachtungen zusammen, so gelangt man dazu, die Gerade und den Punkt als ausgeartete Kegelschnitte zu betrachten. Diese Sichtweise wird ja auch dadurch nahegelegt, dass man z. B. den Kreis, indem man ihn wachsen und schrumpfen lässt, als Vermittlung zwischen Gerade und Punkt betrachten kann. Lässt man ihn immer kleiner werden, so schrumpft er schliesslich in einen Punkt zusammen, während zugleich die Krümmung unendlich gross wird. Lässt man ihn wachsen, so nimmt die Krümmung zunehmend ab. In dem Moment, wo sie nicht mehr vorhanden ist, fällt die Kreislinie mit der unendlich fernen Geraden zusammen. Wir haben also jetzt drei verschiedene Formen der Bewegung projektiv erzeugt: eine gleichbleibende, stets in gleichen Schritten schreitende, wobei die gleichen Schritte nur dann auch metrisch gleiche Abstände erzeugen, wenn aus der Unendlichkeit heraus projiziert wird. Eine wachsende, bei der die Schritte in einem gesetzmässigen Verhältnis auseinander hervorgehen, indem sie in einer stets gleichen Weise wachsen oder verringert werden. Eine unaufhörlich kreisende Bewegung, die sich ohne Halt fortsetzt. Die erste Form, das Schrittmass, ergibt sich dadurch, dass sich die projizierten Punkte von beiden Seiten gegen einen (funktionell unendlichen) Fixpunkt stauen. Das Wachstumsmass bewegt sich in gleicher Weise zwischen zwei Fixpunkten, gegen die es sich ebenfalls staut. Anders das kreisende Mass: hier gibt es keinen sichtbaren, fixierten Staupunkt. Es gibt Bereiche, in denen die projizierten Punkte näher beieinander liegen und solche, wo sie sich weiter voneinander entfernen. Aber ein Element, welches die Bewegung anhält, ist nicht auszumachen. Betrachten wir nochmals die Abbildung 2c. Man sieht hier unmittelbar, dass es möglich ist, die Projektion in beiden Segmenten der Geraden, die von O und U erzeugt werden, auszuführen. Aber ein Hinübergleiten durch fortgesetztes Projizieren von einem Segment in das andere ist nicht möglich. In den beiden Punkten O und U ist die Bewegung angehalten. Will man von einem Segment ins andere wechseln, so muss man von Q oder Q' ausgehend den Vorgang neu beginnen. Dies ist der entscheidende Unterschied zwischen dem Wachstumsmass (oder dem Schrittmass, wo die beiden begrenzenden Punkte zusammenfallen) und dem kreisenden Mass: beim kreisenden Mass können die projizierten Punkte beliebig oft der Geraden oder dem Kegelschnitt entlang gleiten, in den beiden anderen Fällen kommt die Bewegung in einem oder in zwei Punkten zum Stillstand. Mit dem Strömen von Punkten auf Geraden sowie mit der Art und Weise, wie sie angehalten werden oder nicht, werden wir uns im nächsten Kapitel im Zusammenhang mit der Involution weiter beschäftigen.