II. Was ist Projektivität?

a. Die Fernelemente und die Dualität

Die projektive Geometrie ist eine Entwicklung der Neuzeit. Sie löst eine Schwierigkeit, die in der euklidischen Geometrie offenbleibt, nämlich die Frage, wie es mit dem Schnittpunkt von parallelen Geraden bestellt ist. Für die euklidische Geometrie ergibt sich hier eine Definitionslücke, die für die gedankliche Geschlossenheit des Systems ein schwerwiegendes Problem darstellt. Denn zwei Geraden, die in einer gemeinsamen Ebene liegen, also nicht windschief sind, haben immer genau einen Schnittpunkt. Wenn man, so wie Euklid dies getan hat, im Falle der Parallelen eine Ausnahme macht, so kann man die Gesetzmässigkeit zwar immer noch in den anderen Fällen anwenden, sie ruht aber auf einem unsicheren, nicht durchschaubaren Untergrund auf. Für das menschliche Bestreben, im Erkennen einen festen Grund zu finden, kann dies als ernsthaftes Hindernis erlebt werden. Zwar ist der Mensch des 20. und noch mehr des 21. Jahrhunderts einer tiefen Unsicherheit ohnehin in vielen Lebensbereichen ausgesetzt, aber gerade dadurch wird die Frage nach der Möglichkeit von Erkenntnis und deren stützender Kraft umso wichtiger. Für Euklid ist deutlich, dass sich Parallelen nicht schneiden können, da sie ja, soweit man sie auch verfolgen mag, den stets gleichen, einmal angenommenen, Abstand beibehalten.[1] Sobald man die Messung des Abstands als Erkenntnismittel heranzieht, ist das natürlich auch logisch. Die parallelen Geraden können weder näher zusammen kommen noch sich weiter voneinander entfernen. Also müssen die Verhältnisse, die man in einem begrenzten Ausschnitt zum Beispiel durch Zeichnung oder auch durch die Vorstellung zur Sichtbarkeit bringen bzw. innerlich verdeutlichen kann, für die Gerade in ihrer ganzen Erstreckung gültig sein. Gleichzeitig ist durch diese Vorgehensweise das Überschauen der Ganzheit verwehrt, denn: wo beginnt die Gerade und wo hört sie auf? Für praktische Zwecke kann ich eine Strecke von einer bestimmten Länge definieren, damit kann ich dann konstruieren oder auch rechnen. Man kann sich vorstellen, dass die Entdeckung solcher Anwendungsmöglichkeiten zunächst mit der Freude gepaart aufgetreten ist, die sich immer einstellt, wenn man etwas Neues findet. Jedoch: so einfach eine Gerade zu sein scheint: ihre Ganzheit kann ich auf diesem Wege nicht überblicken. Ich bleibe auf den Ausschnitt beschränkt. Wenn es um die Anwendbarkeit geht, ist diese Beschränkung in vielen Fällen verkraftbar. Will man wissen, was man tut, bzw. womit man umgeht, so strebt man irgendwann über die Betrachtung des Ausschnitthaften hinaus.

In der projektiven Geometrie geht man daher anders mit den Grundelementen Punkt, Gerade und Ebene um. Man betrachtet sie als gleichberechtigt, d. h., man leitet nicht ein Element aus dem anderen ab. Da sie gedanklicher Art sind, kann man sie nicht nur zu Konstruktionen verschiedener Art verwenden, sondern auch durch die Konstruktionen und unabhängig von ihnen in ihrer Beschaffenheit charakterisieren. Durch Zeichnungen können sie nicht direkt sichtbar gemacht, sondern nur beispielhaft veranschaulicht werden. Ein gerader Strich auf einem Blatt Papier kann eine Gerade meinen und so eine gute Vorstellungshilfe sein, er ist aber nicht die Gerade. Die mögliche Formenvielfalt, die sich aus diesen Grundelementen und ihren Beziehungen ergibt, ist wohl kaum abschliessend zu überschauen, die Grundelemente selbst kann man sich aber nicht nur ausschnitthaft, sondern auch in ihrer Ganzheit verdeutlichen.

Zum Einstieg soll versucht werden, einen solchen Zugang zu der Ganzheit der Grundgebilde aufzuzeigen. Dabei zeigt sich gleichzeitig das zweite für die projektive Geometrie wichtige Prinzip, nämlich das der Dualität. In der Ebene stehen sich Punkt und Gerade, im Raum Punkt und Ebene dual oder polar gegenüber. Daraus ergibt sich, dass jedes geometrische Gebilde, das aus diesen Elementen gestaltet ist, eine eindeutige, polare Entsprechung hat. Darauf werde ich im Text immer wieder, auch anhand von Beispielen, zurückkommen.[2]

[1] Vgl. z. B Adams 1965, Kap. 1

[2] Vgl. z. B. Locher Ernst 2016
Louis Locher 1970

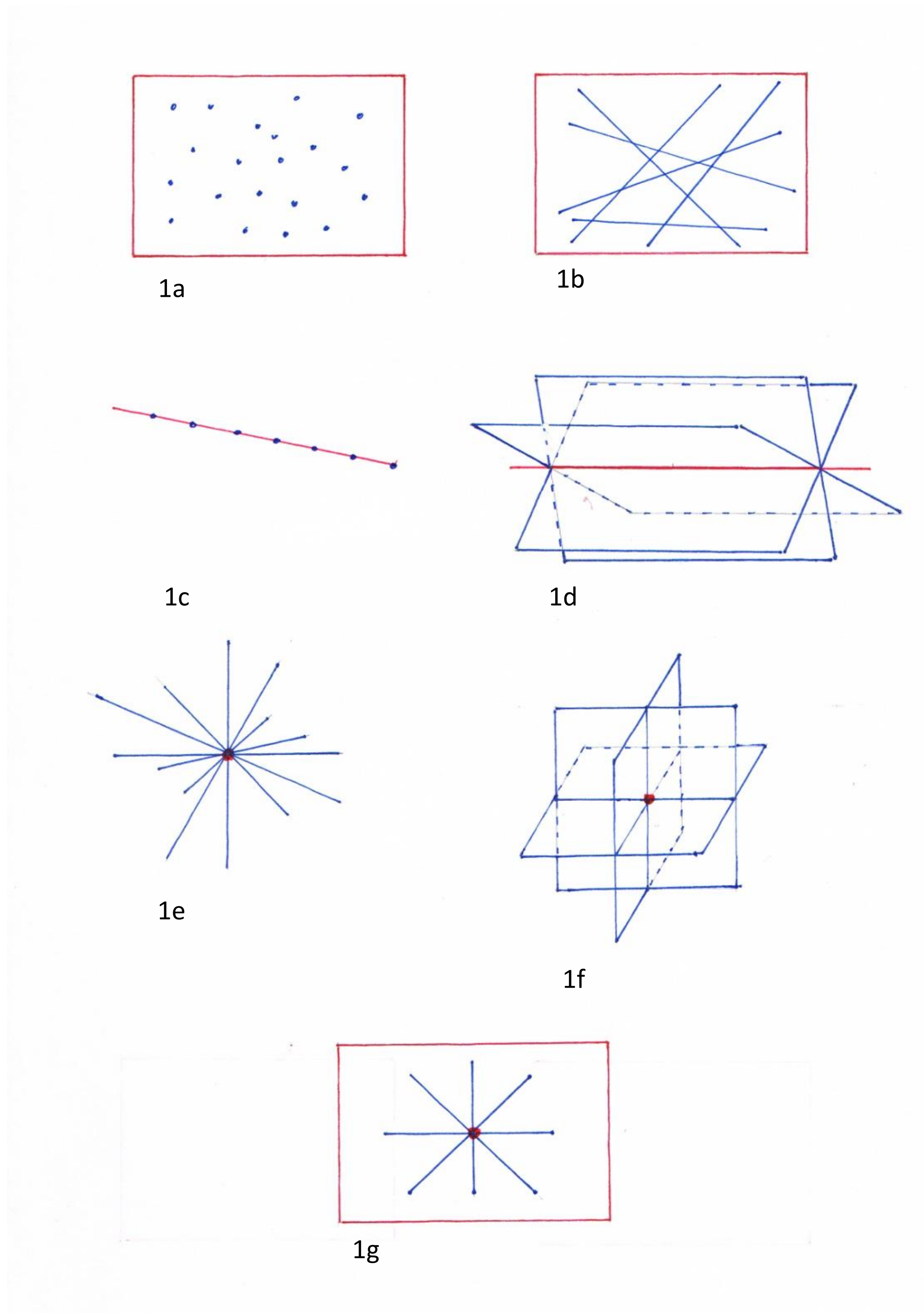

Abb. 1

Zunächst ist es sinnvoll, den Punkt, die Gerade, die Ebene in ihren Funktionen unabhängig von ihrer Grösse zu betrachten. Alle Elemente können sich nämlich gegenseitig tragen. Bei der Ebene kann man sich das leicht vorstellen. In einer Ebene, die man jetzt in ihrer ganzen Ausdehnung denkt, können sowohl unbegrenzt viele Punkte als auch unbegrenzt viele Geraden liegen. Man bezeichnet das Gebilde dann als Punktfeld oder Strahlenfeld. In den Abbildungen 1a und 1b ist natürlich nur ein Ausschnitt (Rot) der Trägerebene angedeutet. Aber auch die Gerade kann Träger sein, Träger von Punkten und auch Träger von Ebenen. Dass auf einer Geraden unendlich viele Punkte liegen können, ist einsehbar. Ebenso gut kann die Gerade aber auch Träger unendlich vieler Ebenen sein, nämlich aller Ebenen, die sich in ihr schneiden. Sie erscheint so als Punktreihe (Abb. 1c) oder als Ebenenbüschel (Abb. 1d). In der Zeichnung sind drei Ebenen durch eine Gerade angedeutet, man kann sich das Gebilde in der Vorstellung entsprechend erweitern. Schliesslich kann der Punkt Träger unendlich vieler Geraden oder Ebenen sein, die alle durch ihn hindurch gehen. Das Gebilde heisst Strahlenbündel (Abb. 1e) oder Ebenenbündel (Abb. 1f). Man hat zunächst vielleicht Schwierigkeiten mit der Vorstellung, dass der (unendlich kleine) Punkt Träger von Gebilden sein soll, die über erheblich grössere Ausdehnung verfügen als er selbst. Was hier im Weg steht, ist mehr die Gewohnheit, logisch ergibt sich kein Problem, wenn man zum Beispiel alle Geraden, die durch einen Punkt gehen, als zu dem Punkt gehörig ansieht. Die Lage aller Punkte auf einer Geraden ist festgelegt durch die Lage der Geraden. Die (unendlich grosse) Menge aller Punkte, die auf einer Geraden liegen, kann ich eindeutig von allen Punkten unterscheiden, die nicht auf der Geraden liegen. Dasselbe gilt aber auch für das Strahlenbündel: die unendlich grosse Menge aller Geraden, die durch einen Punkt gehen, kann ich eindeutig von allen Geraden unterscheiden, die nicht durch diesen Punkt gehen. Es gibt noch ein weiteres Gebilde, bei dem sowohl die Ebene als auch der Punkt Träger von Geraden ist: das Strahlenbüschel. Es besteht aus allen Geraden, die in einer Ebene liegen und durch einen Punkt gehen (Abb. 1g). Damit wären zunächst die einfachsten Grundgebilde der Geometrie angedeutet. Sie stehen in mannigfaltigen Verhältnissen zueinander und lassen sich dementsprechend in vielfältiger Weise ineinander überführen. Dazu nur zwei Beispiele: verbinde ich je 2 Punkte eines Punktfeldes miteinander, so erhalte ich daraus ein Strahlenfeld. Schneide ich ein Ebenenbüschel mit einer Ebene, die dem Büschel nicht angehört, so erhalte ich ein Strahlenbüschel. Die verschiedenen Möglichkeiten, wie man von einem Gebilde zum anderen gelangen kann, findet man systematisch betrachtet bei Louis Locher Ernst.[3]

Indem die projektive Geometrie die Gerade um ihren unendlich fernen Punkt ergänzt, ermöglicht sie das Erfassen der Geraden als Ganzes. Man kann sich dies auf verschiedenen Wegen verdeutlichen: Es lässt sich zeigen, dass der unendlich ferne Punkt einer Geraden sich in bekannte, einfache geometrische Gesetzmässigkeiten einfügt, ohne diese zu sprengen. Dieser Weg ist mehr logisch betont. Der Weg über die Anschauung ist auch möglich. Er schliesst die verbleibende Lücke, die sich rein logisch nicht schliessen lässt. Hierbei ergibt sich die spannende Tatsache, dass man mit der üblichen, eher statischen Vorstellung nicht zurechtkommt. Ein Einblick ergibt sich, wenn man das Gewordene – die Vorstellung – in Bewegung versetzt und diese, so weit wie möglich, zu steigern versucht. Im Folgenden sollen beide Wege andeutungsweise verfolgt werden.

Wir betrachten in der Abbildung 2 zunächst die beiden Geraden g und h und wählen einen Punkt P, der nicht auf g oder h liegt. (Die beiden Geraden müssen nicht senkrecht aufeinander stehen, dies dient nur der einfacheren Übersicht.) Durch den Punkt P laufen Geraden, die die Geraden g und h schneiden. Jede Gerade des Büschels durch P schneidet die Gerade g und die Gerade h je einmal. Für die gezeichneten Geraden ist dies im Bild sichtbar, es entspricht aber auch einer Gesetzmässigkeit: 2 Geraden, die in einer Ebene liegen, haben einen und nur einen Schnittpunkt gemeinsam. Durch die Betrachtung der Schnittpunkte der Büschelgeraden mit den Geraden g und h kann ich jedem Punkt der Geraden g eindeutig einen Punkt der Geraden h zuordnen und umgekehrt. Für die Anschauung scheint es 2 Ausnahmen zu geben, nämlich die beiden Geraden g‘ und h‘ (Parallel zu g und h).

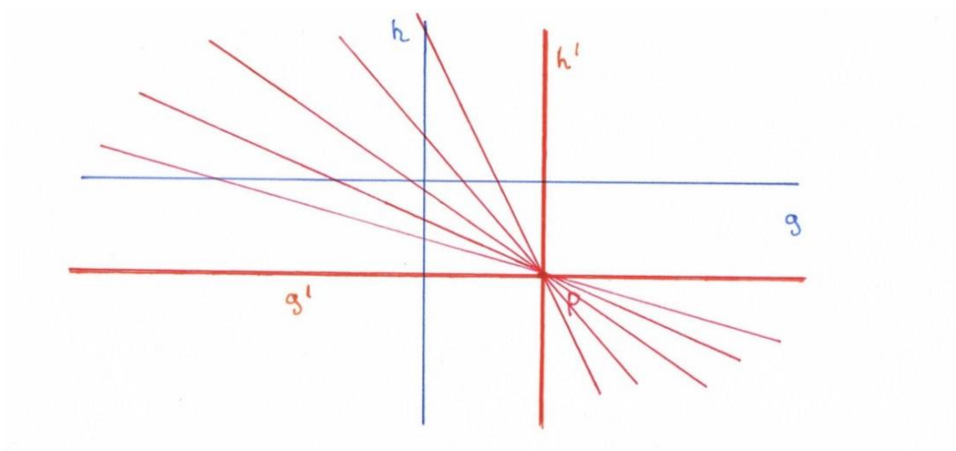

Abb. 2

[3] Locher:Ernst 1980a, Kap.: Die Grundelemente und Grundgebilde sowie Kap.: Urphänomene der Verknüpfung. Überhaupt baut Locher seine einführenden Schriften zur Projektiven Geometrie auf der systematischen Betrachtung der Grundgebilde und der Art, wie sie zueinander in Beziehung gesetzt werden können, auf.

Folgt man aber nicht der Anschauung, sondern der Gesetzmässigkeit, so ergibt sich: die Gerade g‘ hat ebenso wie alle anderen Geraden mit den Geraden g und h je einen Schnittpunkt, nur ist der Schnittpunkt mit g unendlich fern. Durch die vorliegende Konstruktion ist also dem Schnittpunkt der Geraden g‘ und h der unendlich ferne Punkt der Geraden g zugeordnet. Entsprechendes ergibt sich für die Geraden g und h‘. Bereits aus dieser Betrachtung ergibt sich, dass der unendlich ferne Punkt der Geraden g nach rechts und links (bzw. der Geraden h nach oben und unten) derselbe ist. Wäre dies nicht so, so würde eine Verletzung der Gesetzmässigkeit vorliegen, denn die Geraden g‘ und h‘ hätten dann mit den Geraden g und h je 3 Schnittpunkte statt 2. Diese Überlegungen können einleuchten, sie sind aber noch nicht ganz hinreichend. Denn die Logik der begrifflichen Verknüpfung entscheidet allein noch nicht darüber, ob das Angenommene auch den Tatsachen entspricht. Hier ist ein Zweifel möglich, der nur durch Anschauung aus dem Weg zu räumen ist. So gesehen hat die obige Betrachtung den Sinn, die Aufmerksamkeit in eine bestimmte Richtung zu lenken und die Frage ist noch offen, was sich denn, wenn man diese Blickrichtung einnimmt, zeigen wird.

In einem nächsten Schritt soll nun versucht werden, die noch fehlende Anschauung zu gewinnen.[4] Zu diesem Zweck wird wiederum eine Gerade g gewählt und ein Punkt P, in welchem eine weitere Gerade gedreht wird. Wir betrachten die Schnittpunkte der gedrehten Geraden auf g (Abb. 3).

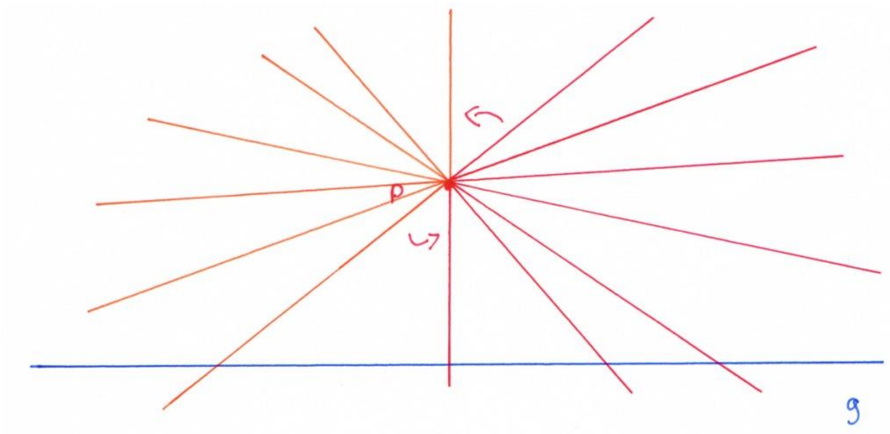

Abb. 3

Bei der gedrehten Geraden sind die beiden Halbstrahlen, die von P aus in entgegengesetzter Richtung verlaufen, unterschiedlich gefärbt. Eine Drehung in P, in diesem Falle gegen den Uhrzeigersinn, ergibt nach rechts wandernde Schnittpunkte auf g. Dies lässt sich fortsetzen bis zur Parallellage von g und der Geraden durch P. Dreht man mit gleichmässiger Geschwindigkeit, so wird die Geschwindigkeit, mit der sich der Schnittpunkt bewegt, immer grösser, bis sie beim Erreichen der Parallellage jedes messbare Mass sprengt. Dreht man nur ein wenig weiter, so kommt der Schnittpunkt von der linken Seite her, zur Mitte hin langsamer werdend, wieder zurück. War es bis zur Parallellage der rot gefärbte Halbstrahl, so ist es jetzt, von der Parallellage bis zur Mitte, der orange gefärbte Halbstrahl, der den Schnittpunkt ergibt. Lässt man die Gerade durch P eine halbe Drehung vollziehen, so kommt der Schnittpunkt wieder in seine Ausgangslage. Fasst man die Bewegung mehr qualitativ atmend auf, so bemerkt man, dass man eine ganze Drehung vollziehen muss, damit jeder Halbstrahl einmal die ausstrahlende und einmal die einstrahlende Gebärde erzeugt. Gerade an dieser Stelle ist es besonders wichtig, die Aufmerksamkeit auf die Begleiterlebnisse des Erkenntnisvollzugs zu richten. Ein merkwürdiger Moment ergibt sich im Erreichen der Parallellage. Liess sich die Bewegung des Schnittpunktes vorher kontinuierlich mitverfolgen, so stösst man hier an eine Grenze des Vorstellungsbewusstseins, die sich nur durch einen Sprung überwinden lässt. Den sich hier vollziehenden Sphärenwechsel wird man gewahr, wenn man bemerkt, dass die Aufmerksamkeit in diesem Augenblick ihre Ausrichtung auf den Punkt aufgeben muss, und sich sozusagen überall zugleich befindet. Im Erkennen ist man ja nicht nur darauf fixiert, ob sich ein bestimmtes Ergebnis einstellt oder nicht,

[4] Entsprechende Zeichnungen finden sich ebenfalls bei Locher Ernst 2016

man ist zugleich eins mit dem gesamten Prozess. Die Anschauung des unendlich fernen Punktes hat die Eigentümlichkeit, dass sie sich nur ergibt durch eine Erkenntnisform, die die Beziehung vom Ergebnis zum Vorgang in den Blick nimmt. Man wird hier gewahr, dass eine über alles Mass hinauswachsende Geschwindigkeit in einer höheren Sphäre zur Ruhe kommt.

Man kann die entsprechende Drehbewegung auch mit einer Ebene ausführen (Abb. 4).

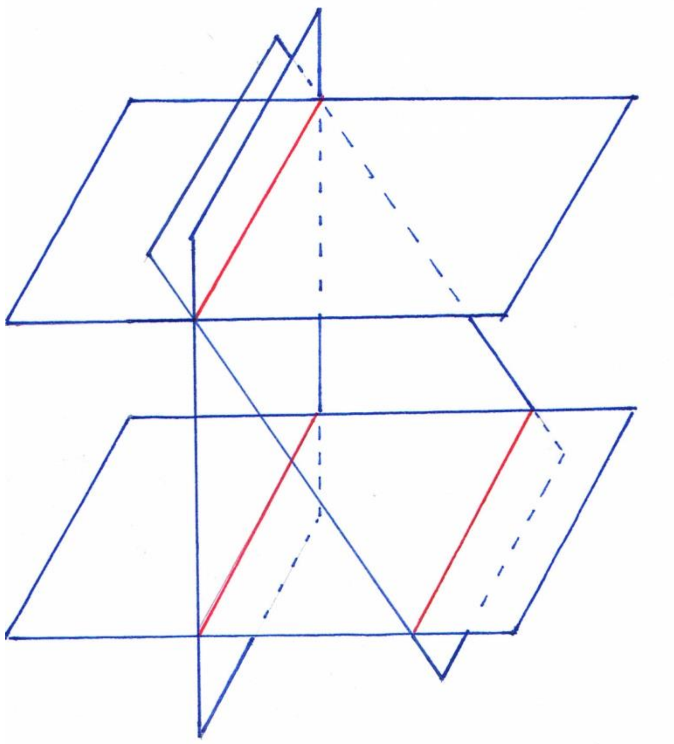

Abb. 4

Man lässt eine Ebene um eine festgehaltene Gerade drehen und verfolgt die Wanderung der Schnittgeraden der drehenden Ebene mit einer zweiten festgehaltenen. Vielleicht erscheint es für die Vorstellung etwas unhandlicher und sperriger als wenn man Geraden dreht, aber das Prinzip ist eigentlich dasselbe. Dreht sich die obige Ebene mit gleichmässiger Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn, so läuft die Schnittgerade mit wachsender Geschwindigkeit nach rechts, bis sie beim Erreichen der Parallellage unendlich gross wird und im nächsten Augenblick von links her, sich wieder verlangsamend, gegen die Mitte zu hineinläuft. Die unendlich ferne Gerade der Ebene nach links und nach rechts ist dieselbe. Im Gegensatz zur Geraden ist die Ebene nicht nur in eine Richtung ausgedehnt, sondern eben in alle Richtungen, die in ihr liegen. Daraus kann sich die Einsicht ergeben, dass die Ebene allseitig von ein und derselben unendlich fernen Geraden „begrenzt" ist. Diese Gerade ist zwar in sich geschlossen, sie hat aber keine Krümmung, wie ein Kreis. Sie ist tatsächlich gerade. Die ungekrümmte Geschlossenheit ist natürlich ein Merkmal jeder Geraden, wenn man sie in ihrer ganzen Ausdehnung betrachtet. Die Ferngerade einer Ebene verläuft aber gänzlich im Unendlichen, alle übrigen Geraden durchqueren die Unendlichkeit in einem Punkt.[5]

In der Projektiven Geometrie wird es als selbstverständlich und natürlich angesehen, den unendlich fernen Punkt sowie die unendlich ferne Gerade in die Konstruktion mit einzubeziehen. Dies soll an einem einfachen Beispiel aufgezeigt werden. Man denke sich 2 Dreiecke in einer Ebene liegend. Bei beiden Dreiecken kann ich die Ecken mit A, B, C und die gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c bezeichnen. Die einander so zugeordneten Ecken beider Dreiecke verbinde ich mit je einer Geraden. Die einander zugeordneten Seiten verlängere ich, bis sie sich schneiden. Die drei sich so ergebenden Geraden bilden normalerweise wiederum ein Dreieck (Dreiseit), die drei sich ergebenden Schnittpunkte kann ich wiederum zu einem Dreieck (Dreipunkt) verbinden. In der Abbildung 5 sind

[5] Ferngerade ist lediglich eine andere Bezeichnung für die unendlich ferne Gerade; entsprechendes gilt für die Bezeichnungen Fernpunkt und Fernebene.

die beiden ursprünglichen Dreiecke rot gefärbt, dasjenige, das sich durch die Verbindung der Ecken ergibt, grün und schliesslich geht das gelbe Dreieck aus den Schnittpunkten hervor, die sich aus der Verlängerung der Seiten ergeben.

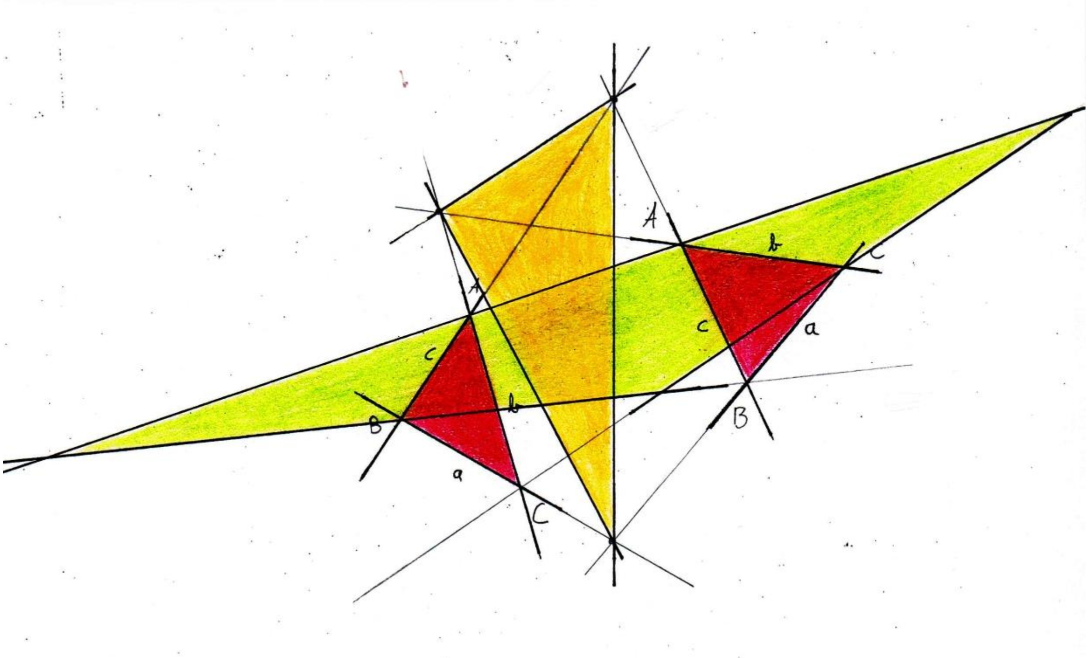

Abb. 5

Verschiedene zeichnerische Versuche führen zu Dreiecken ganz verschiedener Lage und Grösse, aber man wird praktisch immer aus zwei Dreiecken wieder 2 Dreiecke erhalten. Es gibt eine einzige Ausnahme, die tritt dann auf, wenn sich die Geraden durch die Eckpunkte in einem Punkt treffen. Immer, wenn das der Fall ist, liegen gleichzeitig die Schnittpunkte der Dreiecksseiten auf einer Geraden. Nach dem Entdecker dieser Tatsache, Girard Desargues, nennt man dieses Gebilde Desarguessche Konfiguration.[6] In diesem Fall arten die beiden verschieden entstandenen Dreiecke in polare Gebilde aus: eben in drei Geraden durch einen Punkt sowie in drei Punkte auf einer Geraden. Interessanterweise ist dieses Gesetz, das die beiden polaren Erscheinungen miteinander verknüpft, ungebrochen gültig, auch wenn ein oder mehrere Punkte oder auch Geraden unendlich fern liegen. Dazu findet man im Folgenden einige erläuternde Zeichnungen.

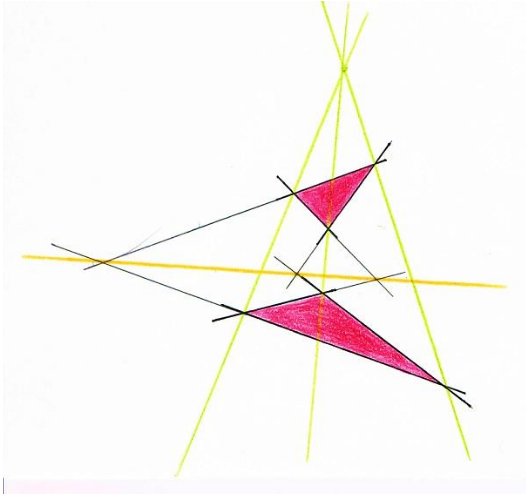

Abb. 6a

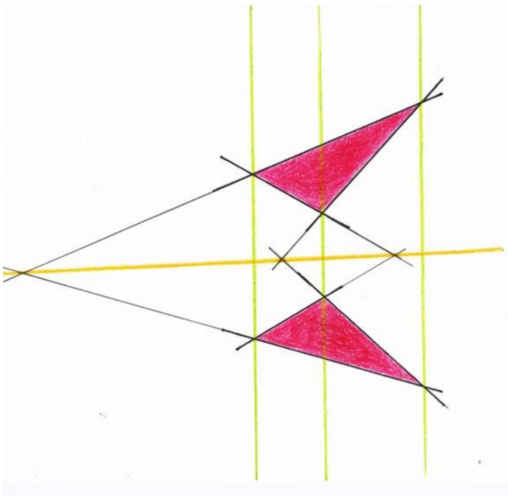

Abb. 6b

[6] Girard Desargues (1593 – 1662) war mit Descartes befreundet.

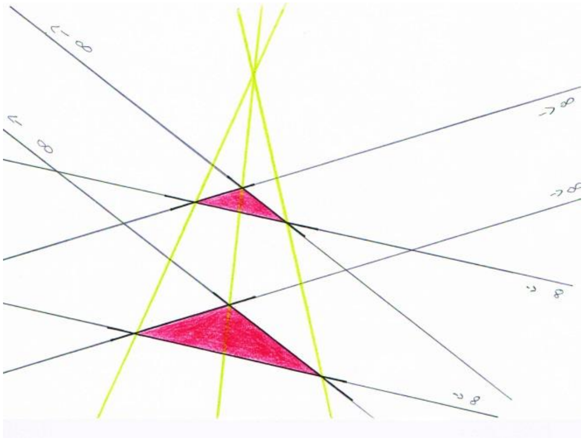

Abb. 6c

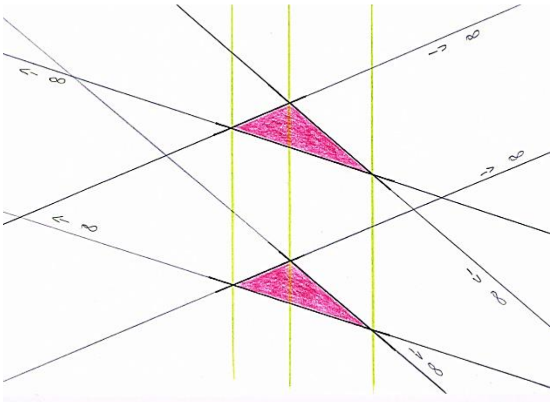

Abb. 6d

Abbildung 6a zeigt, dass sich das grüne Dreieck von Abbildung 5 in einen Punkt verwandelt hat, durch den 3 Geraden laufen und das gelbe Dreieck in eine Gerade, auf der die 3 Schnittpunkte der Seiten liegen. Dies ist sozusagen der Normalfall, der die Gesetzmässigkeit übersichtlich darstellt. In Abbildung 6b ist der Schnittpunkt der grünen Geraden der unendlich ferne Punkt der Parallelen. An der Gesetzmässigkeit ändert sich nichts: die Schnittpunkte der verlängerten Seiten liegen nach wie vor auf einer Geraden. In der folgenden Abbildung 6c sind alle Schnittpunkte der verlängerten Seiten unendlich fern. Alle Seiten der beiden Dreiecke sind parallel, die Schnittpunkte liegen auf der Ferngerade der Zeichenebene. Die Verbindungen der Ecken laufen wiederum durch einen Punkt. Die beiden Ausgangsdreiecke sind ähnlich: es sind sowohl die Winkel als auch die Seitenverhältnisse gleich. Es handelt sich um ein Beispiel einer zentrischen Streckung. Abbildung 6d zeigt 2 gleiche parallel verschobene Dreiecke. Sowohl die Schnittpunkte der Seiten als auch der Punkt, in dem sich die Ecken schneiden, liegen unendlich fern, dieses Mal sogar auf ein und derselben Geraden.

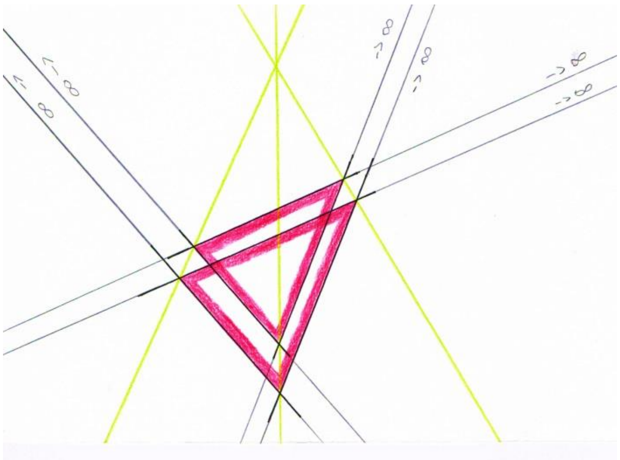

Abb. 7a

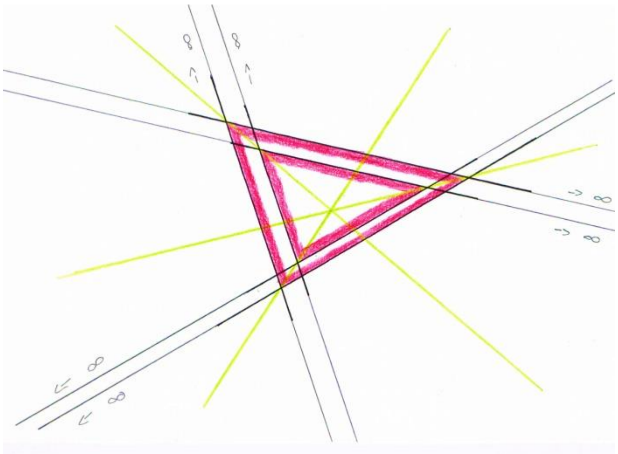

Abb. 7b

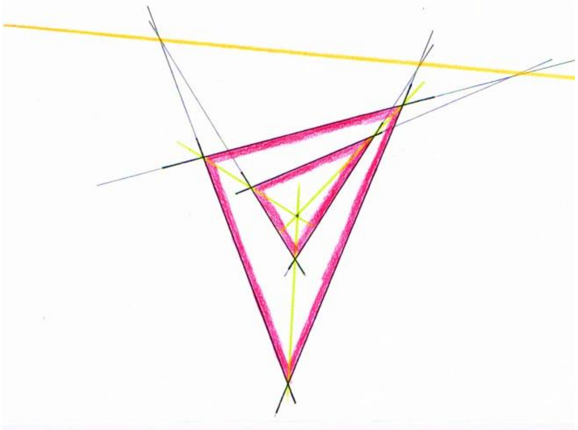

Abb. 7c

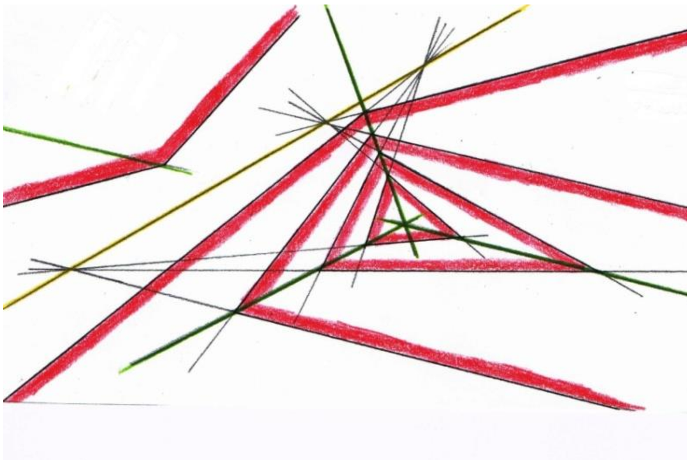

Abb. 8

Die Abbildungen 7a und 7b zeigen wiederum Beispiele der gleichen Gesetzmässigkeit, eben solche, die man in der Schulgeometrie als zentrische Streckung kennt. Der Punkt, in dem sich die Verbindungsgeraden der Ecken schneiden, ist gleichzeitig das Streckzentrum. Es kann sowohl ausserhalb als auch innerhalb der Dreiecke liegen. In beiden Fällen sind sämtliche Seiten der Dreiecke parallel, sodass die gelbe Gerade ausserhalb der Sichtbarkeit unendlich fern liegt. In Abbildung 7c liegt der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden der Ecken im Innern der Dreiecke, die Schnittpunkte der Seiten sind aber wieder in die Sichtbarkeit gerückt. Für die beiden Dreiecke ergibt sich daraus, dass sie nicht mehr im üblichen Sinne ähnlich sind. Aber das stört nicht weiter: die Gesetzmässigkeit des Desargues gilt auch hier. Die letzte Abbildung 8 zeigt nicht 2 sondern 4 Dreiecke, die alle der gleichen Gesetzmässigkeit folgen: die beiden kleineren Dreiecke liegen ineinander. Bei dem nächst Grösseren liegt eine Ecke unendlich fern. Bei dem grössten Dreieck schliesslich ist eine Ecke durch die Unendlichkeit hindurch gelaufen und von der anderen Seite zurückgekehrt. Man sieht hier eine Möglichkeit, wie man durch gesetzmässige Bewegung Dreiecks-metamorphosen ausführen kann. Dass das letzte Stadium auch als Dreieck aufgefasst wird, bedarf vielleicht noch der Erläuterung. Zumindest das aus der Schulgeometrie bekannte Gesetz über die konstante Innenwinkelsumme von 180 Grad gilt hier so nicht mehr. In den Ausführungen über Hüllen und Kerne wird darauf näher eingegangen.

Wir haben die aus- und einstrahlende Bewegung verfolgt, die ein sich gleichmässig in einem Punkt drehender Strahl auf einer ruhenden Geraden erzeugt. Im Prinzip kann man jede Gerade als Träger einer solchen Bewegung auffassen. Das Strahlenbüschel erscheint dann als ein atmendes Gebilde, in welchem jeder Strahl vom Mittelpunkt zur Unendlichkeit ausstrahlt und von der entgegengesetzten Richtung her wieder einstrahlt. Grundsätzlich kann man auch ein Strahlenbündel in der gleichen Weise betrachten.[7] Was ergibt sich, wenn man alle Strahlen, die durch einen Punkt gehen, in den Blick nimmt und nicht nur diejenigen, die in einer Ebene liegen? Für die Vorstellung ist es hilfreich, eine Kugel zu Hilfe zu nehmen und den Bündelpunkt in den Kugelmittelpunkt zu legen. Jeder Kugeldurchmesser stellt dann den Ausschnitt eines Strahles dar. Wiederum kann ich die Kugel wachsen und schrumpfen lassen. Wird sie immer kleiner, so wird die Krümmung der Kugel-oberfläche beständig grösser und im Extremfall fallen alle Punkte in den Mittelpunkt zusammen. Umgekehrt: lasse ich die Kugel wachsen, so nimmt die Krümmung der Oberfläche in dem Masse ab, in dem der Radius grösser wird. Solange der Durchmesser im messbaren Bereich bleibt, ist eine, wenn auch noch so kleine Krümmung immer feststellbar. Erst in dem Moment, wo der Durchmesser unendlich gross wird, wird die Kugeloberfläche zu einer geraden Fläche. Je 2 Punkte, die vorher auf dem Durchmesser gegenüberlagen, fallen in den einen unendlich fernen Punkt der betreffenden Geraden zusammen. Während bei einem Kreis, wenn man ihn entsprechend wachsen lässt, alle unendlich fernen Punkte in einer Linie liegen, ist es offensichtlich, dass, bei einer Kugel alle Fern-punkte der Strahlen in einer Ebene liegen. Man kann sich die Verhältnisse veranschaulichen, indem man sich eine im Endlichen liegende Kugel vorstellt, die mit einem Punkt an einer unbeweglichen Ebene angeheftet ist (Abb. 9).

[7] Vgl. Locher Ernst 2016, Kap.: Das Unendliche in der Geometrie

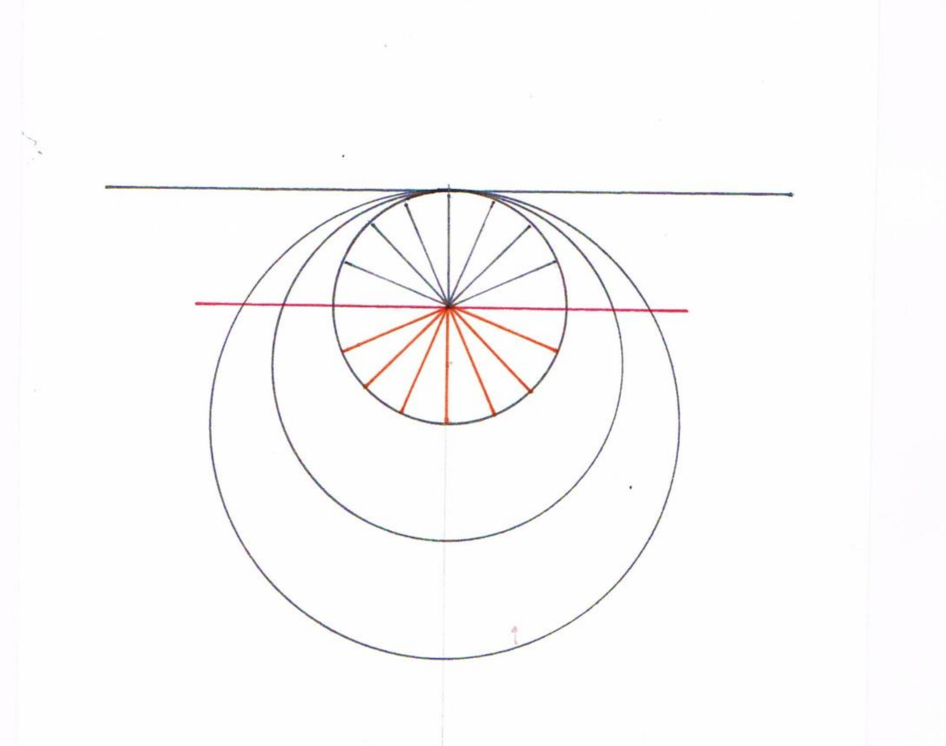

Abb. 9

Lässt man die Kugel wachsen, so nähert sich deren Oberfläche in der Nähe des fixierten Punktes der Ebene, in der dieser liegt, immer mehr an. Ein minimaler Abstand bleibt (abgesehen von dem Haftpunkt) jedoch vorhanden, solange der Durchmesser endliche Grösse hat. Springt er in die Unendlichkeit, so fällt einerseits die Kugelfläche mit der feststehenden Ebene zusammen und andererseits läuft der zweite dem jeweiligen Durchmesser zugehörige Punkt in die Unendlichkeit. Die dort „versammelten“ Punkte finden sich ebenfalls auf einer Ebene ein, der unendlich fernen Ebene des Raumes. Diese ist eine Einzige, denn wohin auch immer ich meine Kugel lege, die Vergrösserung bis zur Unendlichkeit würde, bei festgehaltenem Punkt, stets dazu führen, dass sich die Hälfte der Punkte der Kugelfläche in ein- und derselben Ebene einfinden. Auf den ersten Blick sieht es so aus, als würde der Gang in die Unendlichkeit das zuvor einheitliche Gebilde in 2 Teile zerreissen. Bei genauerer Betrachtung stellt sich heraus, dass die im Endlichen liegende Ebene stets zur Fernebene parallel liegt und diese also in einer unendlich fernen Geraden schneidet. Das Gebilde ist also nach wie vor zusammenhängend, man kann von einer Ebene zur anderen gelangen, ohne die Oberfläche der nun ausgearteten Kugel zu verlassen. Lässt man die sich vergrössernde Kugel frei im Raum schweben, ohne sie an einer Ebene anzuheften, so laufen, wie oben bereits gesagt, alle Punkte in die Unendlichkeit hinein. Um sich eine Anschauung von der unendlich fernen Ebene zu verschaffen, muss man allerdings noch eine Schwierigkeit überwinden, die mit dem Durchgang durch das Unendliche zusammenhängt. Es hat sich bereits ergeben, dass der Schnittpunkt zweier Strahlen, wenn er nach rechts in die Unendlichkeit hinausläuft, nach dem Durchgang durch die Unendlichkeit von links zurückkommt. Für den Betrachter, der aus der Endlichkeit blickt, ergibt sich also eine Vertauschung der Seiten. Dies gilt natürlich nicht nur für rechts und links, sondern ebenso für oben und unten sowie für vorne und hinten. Bei einem Durchgang durch die Unendlichkeit findet immer ein Seitenwechsel statt. Folgt man jedoch dem Punkt, so ergibt sich ein solcher Wechsel nicht. Er setzt seine Bewegung in die Unendlichkeit hinein und durch sie hindurch kontinuierlich fort. Anders gesagt: was für den aussenstehenden Beobachter als Sprung erscheint, der eine neue Qualität zur Folge hat, tritt für das sich bewegende Element so nicht auf.

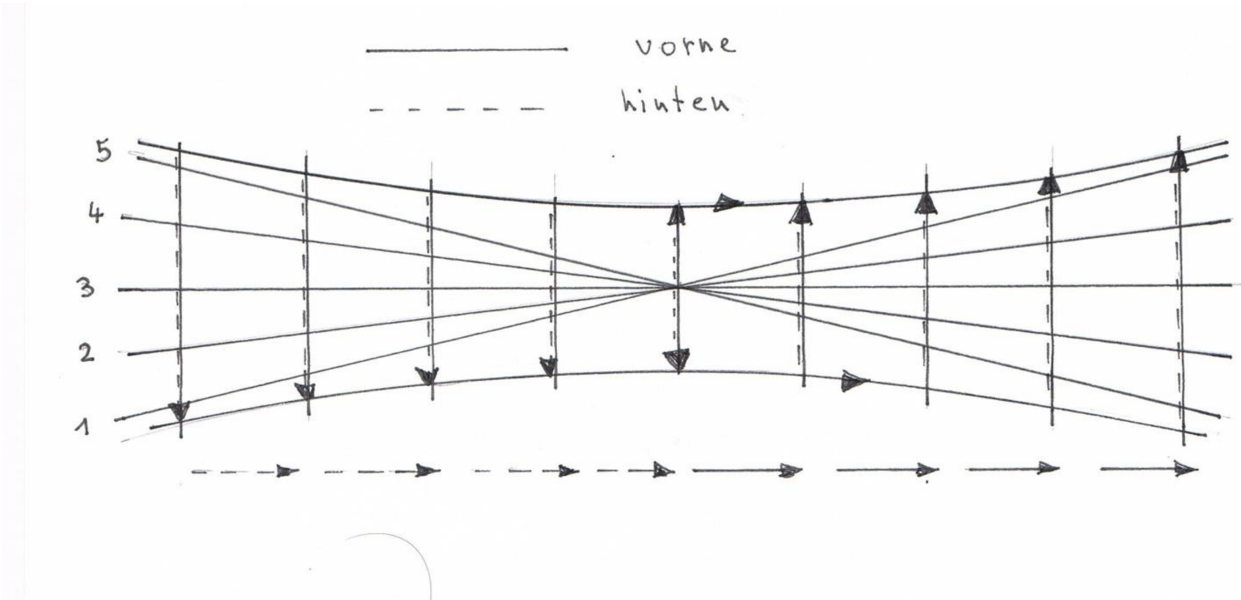

Abb. 10

Ein entsprechendes Paradox ergibt sich bei der Charakterisierung der Ebene. Offensichtlich ist jeder endliche Ausschnitt einer Ebene zweiseitig, denn ich kann ja unterscheiden, ob ich, (je nach Lage der Ebene) von vorn oder hinten, von oben oder unten darauf blicke. Dies gilt nicht mehr, sobald man eine Ebene in ihrer ganzen Erstreckung in den Blick nimmt. Zur Veranschaulichung lassen wir einen sich drehenden Strahl einen Ausschnitt einer Ebene überstreichen und verfolgen die Bewegung der Schnittgeraden auf der Ebene (Abb. 10). Da der Punkt, in dem der Strahl dreht, auf der Zeichnung unendlich fern liegt, erscheint die Drehung auf dem betrachteten Ausschnitt der Ebene als Parallelverschiebung (siehe die senkrecht stehenden Geraden, die mit nach oben, bzw. nach unten weisenden Pfeilen gekennzeichnet sind). Zunächst läuft sie von der Mitte ausgehend auf dem vorderen Teil der Ebene nach rechts bis in die Unendlichkeit hinein. Nach dem Durchgang durch die Unendlichkeit kommt sie von links zurück, sie liegt jetzt auf dem hinteren Teil der Ebene, durchläuft diesen bis zur Mitte und von dort aus weiter, bis sie abermals durch die Unendlichkeit geht. Nun kommt sie von links her wieder gegen die Mitte, diesmal auf der vorderen Seite der Ebene laufend. Der Strahl hat also erst nach einem zweifachen Durchgang durch die Unendlichkeit die Ebene ganz überstrichen. Auch bei dieser Beschreibung ist zu berücksichtigen, dass sie nur Sinn macht aus der Perspektive des Beobachters, der den Vorgang von aussen verfolgt. Der Strahl selbst verläuft in einer kontinuierlichen Bewegung. Eine im Endlichen liegende teilweise Veranschaulichung der Verhältnisse ergibt das Möbiusband (Abb. 11).

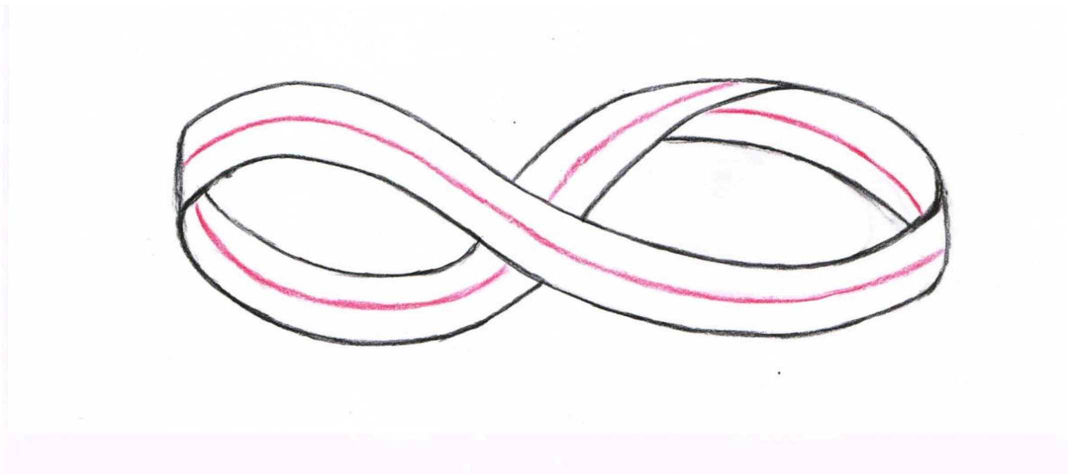

Abb. 11

Wenn man einen Papierstreifen einmal (oder mehrmals, dann muss die Anzahl der Drehungen aber ungerade sein) verdreht und dann zusammenklebt, so kann man, wenn man sich von einer Stelle des Bandes ausgehend gerade in eine Richtung bewegt, das ganze Band überstreichen. Man gelangt, ohne über den Rand des Bandes zu springen, von der „Vorderseite“ auf die „Rückseite“ und wieder zurück. Betrachtet man die Ebene in ihrer Ganzheit, so ist dieser Weg in alle Richtungen möglich. Die Ebene ist in alle Richtungen randlos und man gelangt jeweils beim zweimaligen Durchgang durch die Unendlichkeit wieder an denselben Ausgangspunkt zurück. Den dreidimensionalen Raum von einer unendlich ausgedehnten, randlosen und einseitigen Ebene begrenzt zu denken, ist vielleicht eine etwas schwierige und ungewöhnliche Vorstellung, sie ist aber sachgemäss.

b. Innen und aussen. Kern und Hülle

In dem Moment, wo man den Durchgang durch die Unendlichkeit als Bewegungsform zulässt, stellt sich die Frage nach dem Verhältnis von innen und aussen neu. Eine einfache Veranschaulichung dieses Problems ist am Dreieck möglich. Bei der Abbildung 12a kann man vermutlich ohne grosse Probleme die Innenfläche von der Aussenfläche unterscheiden. Innen ist der Teil, der von den drei Dreiecksseiten begrenzt und so von dem Rest der Fläche abgetrennt wird.

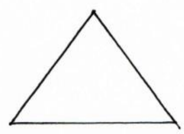

Abb. 12a

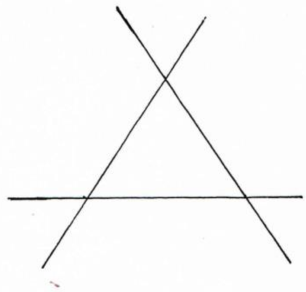

Abb. 12b

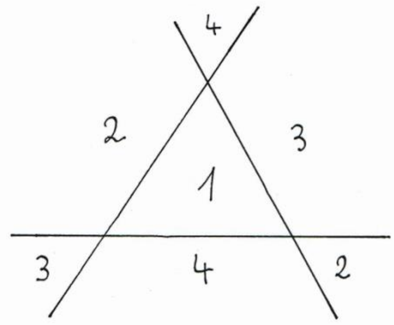

Abb. 12c

Schwieriger wird die Sache bei der Abbildung 12b, wenn man sich die Geraden in ihrer ganzen Ausdehnung denkt. Wo ist jetzt innen und wo aussen? Vermutlich wird man wiederum das Gebiet, das ganz im Endlichen liegt, als inneres Gebiet kennzeichnen. Aber dass dessen Grenze die Unendlichkeit nicht überschreitet und damit leicht zu überschauen ist, stellt nun kein Kriterium mehr dar. Wodurch zeichnet sich ein Innengebiet aus, wenn nicht durch die Endlichkeit seiner Begrenzung? Setzen wir in das Innengebiet der Abbildung 12a einen Punkt. Dieser darf sich frei bewegen, solange er nicht eine das Gebiet begrenzende Gerade überschreitet. Ihm ist sozusagen jede Stelle innerhalb des Innengebietes zugänglich. Alle Stellen, die er nicht erreichen kann, gehören zu einem anderen Gebiet. Dasselbe gilt aber auch dann, wenn ich den Punkt an eine andere Stelle setze. Ich kann ihn irgendwo in der Ebene der Zeichnung platzieren, er gehört einem von insgesamt 4 möglichen Innengebieten an, nämlich immer demjenigen, worin er sich frei bewegen kann, ohne eine der Dreiecksgeraden zu überspringen (Abb. 12c). Dass die Bewegung durch die Unendlichkeit führt, ist kein Hindernis, die sich über das Unendliche erstreckenden Gebiete sind trotzdem zusammenhängend und von den drei das Dreieck bildenden Geraden begrenzt. Die Ferngerade begrenzt die entsprechenden Gebiete ebenso wenig wie eine beliebige andere Gerade. Dass man im Alltagsbewusstsein das Innen dort empfindet, wo die Begrenzung endliche Ausmasse hat, entspricht einer über längere Zeiträume kulturbildend gewordenen Gewohnheit. An den Abbildungen 12b und 12c kann man sich auch verdeutlichen, dass die vier Innengebiete gemeinsam die Ebene genau einmal überdecken. Wie sieht es nun mit dem Aussen aus? Um dieses sachgemäss beschreiben zu können, benötigt man eine andere Bewegungsart, die der eben beschriebenen polar ist. Wir richten den Blick nicht auf die das Dreieck bildenden Geraden, sondern nur auf die drei die Ecken bildenden Punkte. In der Ebene bewegen sich nun nicht Punkte, sondern Geraden. Für diese stellen die drei Punkte Hindernisse dar. Eine Gerade kann sich jeweils soweit bewegen, bis sie in einen Punkt hineinfällt, überstreichen kann sie ihn nicht und aus der Ebene, in der sie liegt darf sie auch nicht herausspringen. Wenn man noch dazu berücksichtigt, dass die bewegende Gerade selbst unendlich ausgedehnt ist, so ergeben sich vier grundsätzlich voneinander verschiedene Lagemöglichkeiten der Geraden in Bezug auf die Punkte und damit vier verschiedene Aussenbereiche. Hatten wir zunächst auf die Begrenzung der Bewegungsmöglichkeit eines Punktes durch drei Geraden geblickt, so betrachten wir jetzt die Begrenzung der Bewegungsmöglichkeit einer Geraden durch drei Punkte. Locher spricht in diesem Zusammenhang von Hüllbereichen, so wie er die Innenbereiche Kerne nennt.[8] Aus der Abbildung 13 kann man die Gestalt der Hüllbereiche ersehen.

[8] Vgl. Locher Ernst 1970, Kap.: Ebene Hüllen und Kerne

Auffallend ist, dass jeder Hüllbereich den zu ihm gehörigen Kern ausspart. Die zusammengehörenden Hüllen und Kerne sind jeweils in derselben Farbe gezeichnet.

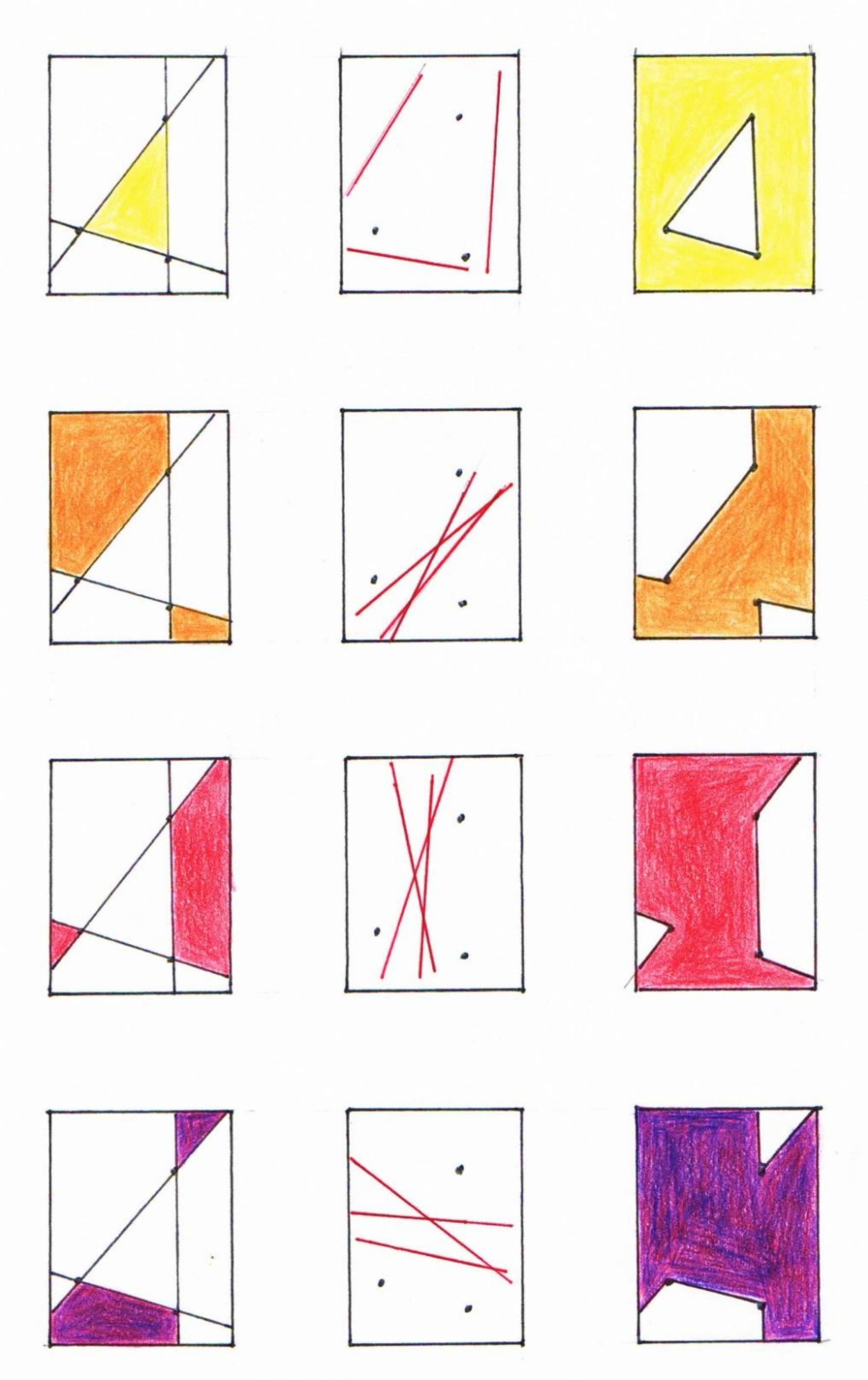

Abb. 13

Die Bezeichnungen Kern und Hülle sind plausibel und sprechend, sie tragen der Tatsache Rechnung, dass man das Innen und das Aussen nicht absolut festlegen kann, sondern immer nur in Bezug auf ein bestimmtes Element. Für den Punkt in seiner Bewegung stellt der zu seinem Innenbereich gehörende Hüllbereich (Strahlenhülle) ein Aussen dar, welches ohne eine Dreiecksseite zu überspringen unerreichbar ist. Für den Strahl in seiner Bewegung stellt das von ihm ausgesparte Punktgebiet ein Aussen dar, das ohne das Überstreichen eines Punktes nicht zu erreichen ist. Man bestimmt also das Aussen und Innen für den Punkt in Bezug auf die Gerade bzw. für die Gerade in Bezug auf den Punkt. Während die Innengebiete der Punkte zusammen genommen die Zeichenebene einmal überdecken, überlappen sich die Hüllen und bedecken die

Fläche mehrfach, zusammen genommen dreimal. Weiterhin stellt sich heraus, dass jeder Kern zusammen mit seiner Hülle die Zeichenebene einmal ganz ausfüllt. Wiederum ergibt sich aus der Perspektive des sich bewegenden Strahles keine Überlappung, denn die Erstreckungsmöglichkeiten des Strahles in einem Hüllbereich sind qualitativ von denen in einem anderen Hüllbereich unterschieden. Für die Charakterisierung des Strahles muss man auf seine Ganzheit blicken, nicht auf einen Ausschnitt, was wiederum dem Punktbewusstsein entsprechen würde. Es ergibt sich hier eine Art von innerem Experiment: Wende ich den Blick in eine bestimmte Richtung, so ergibt sich etwas anderes, als wenn ich eine andere Perspektive einnehme. Die Richtigkeit einer Aussage ergibt sich dann aus der Übereinstimmung der Blickrichtung mit dem Erblickten, nicht daraus, dass eine Blickrichtung als solche richtiger wäre als eine andere. Grundsätzlich entspricht diese Vorgehensweise dem Ideal der Nachvollziehbarkeit des naturwissenschaftlichen Experiments, nur dass die beschreibbaren experimentellen Anordnungen auch seelischer Art sein können. Statt von einem Aufbau der Instrumente könnte man hier von einer Ausrichtung des Blickes sprechen.

Abbildung 14 stellt die Anordnung der Hüllbereiche dar, die entsprechend ist zu der Bewegung der Kerne bei dem letzten Beispiel der Desarguesschen Konfigurationen (Abb. 8). Die gelb gezeichnete Hülle erstreckt sich ausgehend von der Geraden, auf der sich die Dreiecksseiten schneiden, am weitesten in die Richtung des Schnittpunktes der Ecken. Die folgenden Hüllen sind vergleichsweise zurückgezogener und dies umso mehr, je dunkler sie werden.

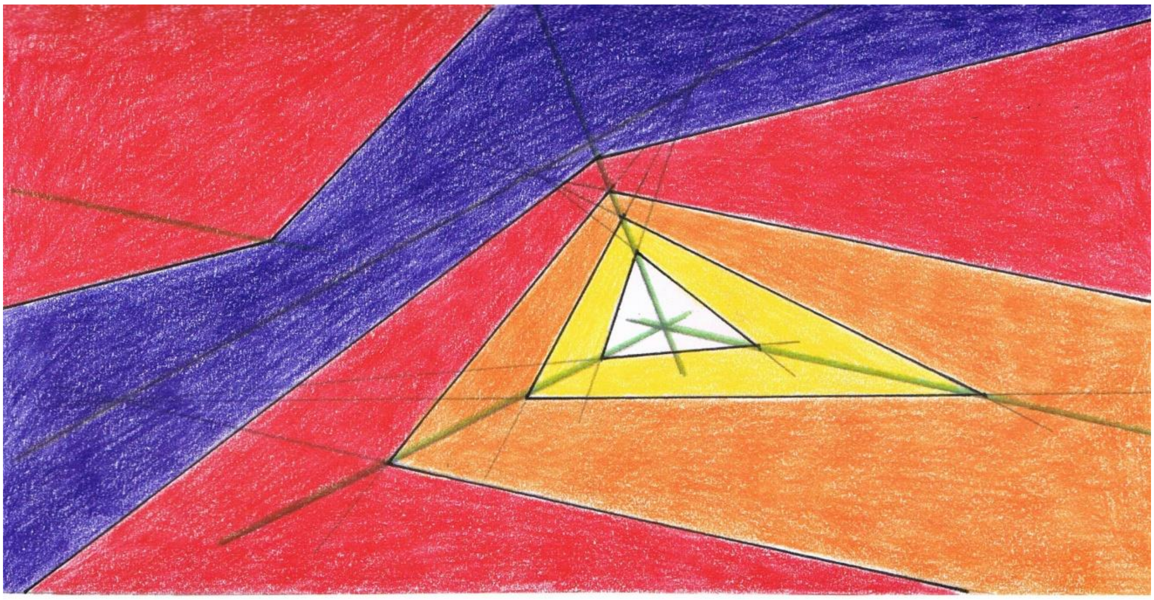

Abb. 14

c. Perspektivität und Projektivität

Die projektive Geometrie ist verknüpft mit den Gesetzmässigkeiten der Perspektive, wie sie dem menschlichen Sehen entsprechen und auch in der Projektion zum Beispiel eines Dias auf eine Leinwand gelten. Man kann die Projektivität gut als Verallgemeinerung dieser Gesetzmässigkeiten erläutern, sie hat aber darüber hinaus eine eigenständige Bedeutung, die den Regeln, die für die Zentralperspektive gültig sind, nochmals übergeordnet ist. Die Abbildung 15 zeigt eine einfache Möglichkeit, unter Zuhilfenahme paralleler Geraden eine Parabel zu konstruieren.[9]

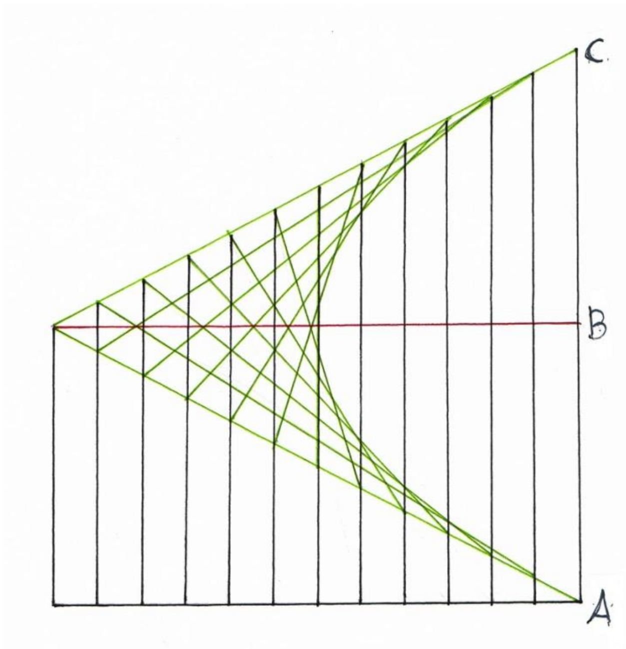

Abb. 15

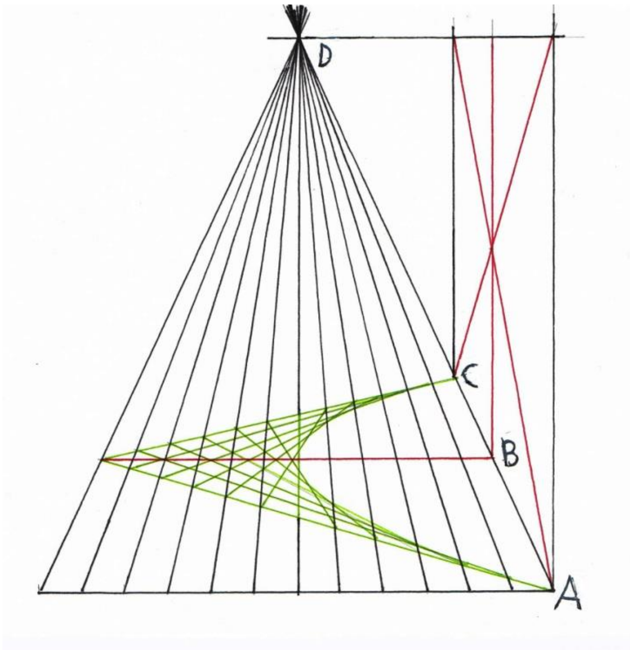

Abb. 16

Die Punkte A, B und C haben offensichtlich gleichen Abstand, der Punkt B halbiert den Abstand zwischen A und C genau. Die Parallelen bieten einen Anhaltspunkt dafür, wie die Geraden liegen, die die Parabel einhüllen. Deren Schnittpunkt ist der gemeinsame Fernpunkt. Die drei angegebenen Punkte liegen harmonisch in Bezug auf diesen Fernpunkt. Sie bilden mit dem Fernpunkt zusammen einen sogenannten harmonischen Punktwurf. Das Kriterium für die harmonische Lage von 4 Punkten ist die Gleichheit der Abstandsverhältnisse: die Strecke von A nach B im Verhältnis zur Strecke von B nach C ist gleich dem Verhältnis der Strecke von A zum Fernpunkt (Punkt D) zur Strecke C zum Fernpunkt. Für die harmonische Lage müssen also grundsätzlich nicht, wie es hier im Bild der Fall ist, einzelne Strecken einander gleich sein, sondern nur die Streckenverhältnisse. Für den vorliegenden Fall ist es wichtig, sich zu verdeutlichen, dass jeder im Endlichen liegende Punkt von dem Fernpunkt der Geraden auf welcher er liegt, gleiche Entfernung hat. Die beiden Strecken AB und BC sind, wie gesagt, gleich gross und dasselbe gilt für die beiden Strecken AD (Fernpunkt, nicht sichtbar) und CD, sodass sich in diesem Fall ein Streckenverhältnis von 1 zu 1 ergibt. In Abbildung 16 ist eine entsprechende Parabel gezeichnet, allerdings ist der Fernpunkt jetzt sozusagen in die Sichtbarkeit gerückt. Er stellt den Fluchtpunkt dar, in dem sich die Parallelen des vorhergehenden Bildes jetzt schneiden. Das Eindrückliche ist nun, dass die Punkte A, B, C und D ebenfalls einen harmonischen Punktwurf bilden. Wiederum ist das Verhältnis der Strecke von A nach B zu der Strecke von B nach C gleich dem Verhältnis der Strecke von A nach D im Verhältnis zur Strecke von C nach D. Der Fernpunkt wird zum Fluchtpunkt der Perspektive, das harmonische Verhältnis der 4 Punkte bleibt erhalten. Dass die Mitte zwischen 2 Punkten die zwischen ihnen befindliche Strecke messbar in 2 gleich grosse Teile teilt, ist eine Erfahrung, die man vom Tasten oder vom

[9] Entsprechende Zeichnungen und viele andere Anregungen zur Perspektive findet man z. B. bei Baravalle 1952

Abschreiten eines Weges kennt. Man weiss ja, dass z. B. die Schwellen von Eisenbahnschienen im gleichen Abstand verlegt sind, obwohl sich das optisch nicht ergibt, sondern nur dann, wenn man sich an den Schienen entlang bewegt, bzw. deren Entfernung abmisst. Auch weiss man, dass die beiden Schienenstränge stets den gleichen Abstand zueinander behalten und sich nicht in der Ferne irgendwo treffen, obwohl es für den Blick, der den Schienenverlauf verfolgen kann, so aussieht. Ganz Ähnliches ergibt sich bei einer Allee, deren Bäume umso kleiner erscheinen, je weiter man den Blick in die Allee hineinschicken kann. Die Abbildungen 17 und 18 zeigen ein zaun- oder gitterartiges Gebilde senkrecht auf dem Boden stehend. Der Zaun ist rhythmisch von senkrechten Streben im gleichen Abstand unterteilt. Die waagrechten Streben laufen parallel und schneiden sich – denkt man sie verlängert – im Fernpunkt. Die perspektivische Darstellung desselben Gebildes zieht den Fernpunkt als Fluchtpunkt in die Abbildung hinein und verkürzt den Abstand zwischen den senkrechten Streben umso mehr, je weiter sich diese dem Fluchtpunkt nähern. Auch hier bilden jeweils 3 aufeinander folgende Berührungspunkte der Streben mit dem Boden gemeinsam mit dem Fluchtpunkt ein harmonisches Verhältnis.

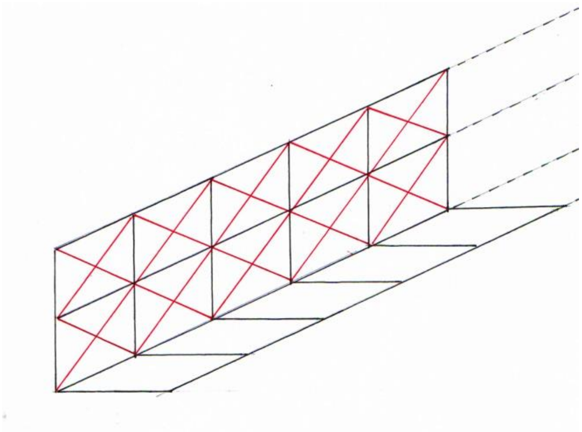

Abb. 17

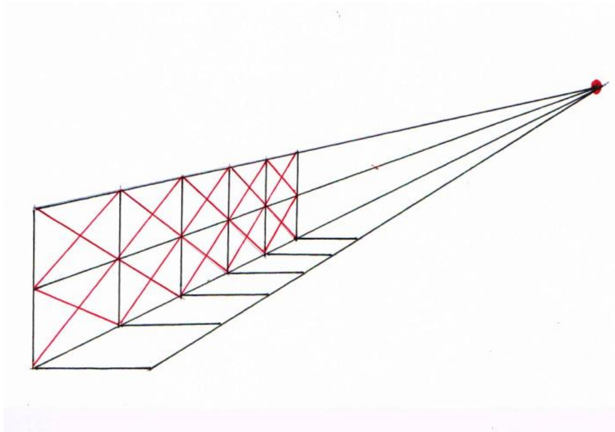

Abb. 18

Perspektivische Abbildungen haben, je nachdem um was für ein Gebilde es sich handelt und wo der Standort des Betrachters angenommen wird, einen oder zwei Fluchtpunkte. Bei komplexeren künstlerischen Darstellungen findet man zuweilen den Fluchtpunkt an bedeutender Stelle innerhalb des Bildes. So laufen zum Beispiel beim Bild des Abendmahls von Leonardo die parallelen Bodenbalken, die Zwischenstreben der Deckenkassetten und die Abschlüsse der Wandbehänge auf den Kopf des Christus zu.

Bei dem in Abbildung 19 gezeichneten Schrägbild eines Quaders verlaufen je 4 Kanten parallel. Die perspektivische Zeichnung eines Quaders (Abb. 20) zeigt 2 Fluchtpunkte, die mit einer Horizontlinie verbunden sind. Diese befindet sich auf der Augenhöhe des Betrachters, der, ein Stück weit entfernt, auf derselben Ebene stehend gedacht ist, auf der der Quader aufruht.

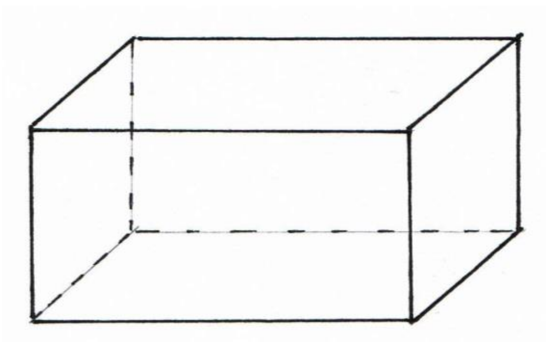

Abb. 19

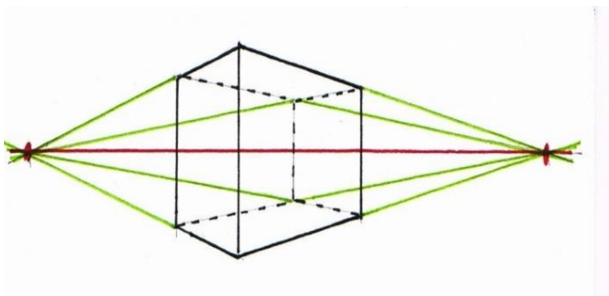

Abb. 20

Auch die in Abbildung 21dargestellte Projektion eines aus einer senkrechten Ebene heraus geschnittenen Dreiecks auf eine waagrechte ist perspektivisch.[10] Die Strahlen, auf denen die einander zugeordneten Ecken der beiden Dreiecke liegen, treffen sich in einem Punkt. Man kann sich in diesem Punkt eine Lichtquelle denken, die durch das hellgrüne Dreieck in der senkrechten Ebene hindurch leuchten kann, während die Umgebung lichtundurchlässig ist.

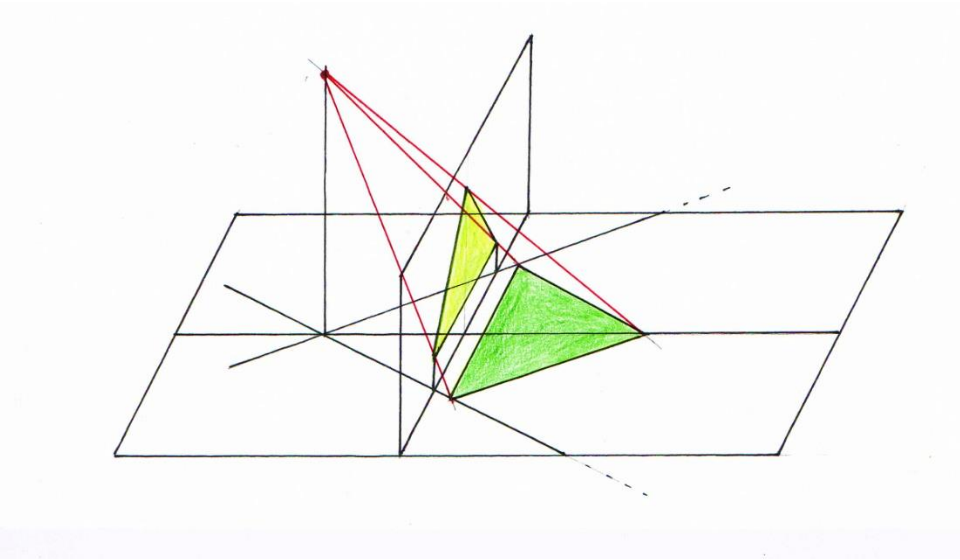

Abb. 21

Auf der waagrechten Ebene ergibt sich so die gezeichnete dunkelgrüne Dreiecksform. Die beiden Ebenen müssten nicht unbedingt senkrecht aufeinander stehen. Man kann sich sämtliche Strahlen, die durch den roten Punkt als Bündelpunkt laufen und gleichzeitig durch die hellgrün gekennzeichnete Ebene hindurch fallen, mit einer beliebigen Ebene geschnitten denken. Immer würde sich ein Dreieck ergeben, das perspektiv zu demjenigen ist, durch das die Strahlen zuerst hindurch gefallen sind. Auch der umgekehrte Fall ist möglich. Ich kann sämtliche Punkte, die z. B. in einer Dreiecksfläche liegen, mit einem nicht in dieser Fläche liegenden Punkt verbinden oder, man könnte auch sagen, in ihm bündeln. Man spricht dann von Scheinbildung im Gegensatz zur oben genannten Schnittbildung[11] Sowohl der Schnitt als auch der Schein liefert ein Gebilde, das zum Ausgangsgebilde perspektiv ist. Die Dreiecksprojektion ist räumlich gemeint, dasselbe ist natürlich auch in der Ebene möglich.

[10] vgl Bernard 1984. Im ersten Teil des Buches ist das Thema der Zentralprojektion ausführlich mit einer grösseren Anzahl von Beispielen bearbeitet.

[11] Man kann von jedem beliebigen Punkt eines Gebildes aus eine Verbindungsgerade zu einem anderen Punkt ziehen. In diesem zweiten Punkt als Bündelpunkt lässt man alle Verbindungsgeraden zusammenlaufen. Die Geraden sind dann die Scheine der Punkte, die sie mit dem Bündelpunkt verbinden. Andersherum kann man durch jeden Punkt eine beliebige Anzahl von Geraden legen und diese mit einer Gerade oder Ebene, die nicht durch den gewählten Punkt laufen, schneiden. Die so entstehenden Punkte sind dann die Schnitte der Geraden.

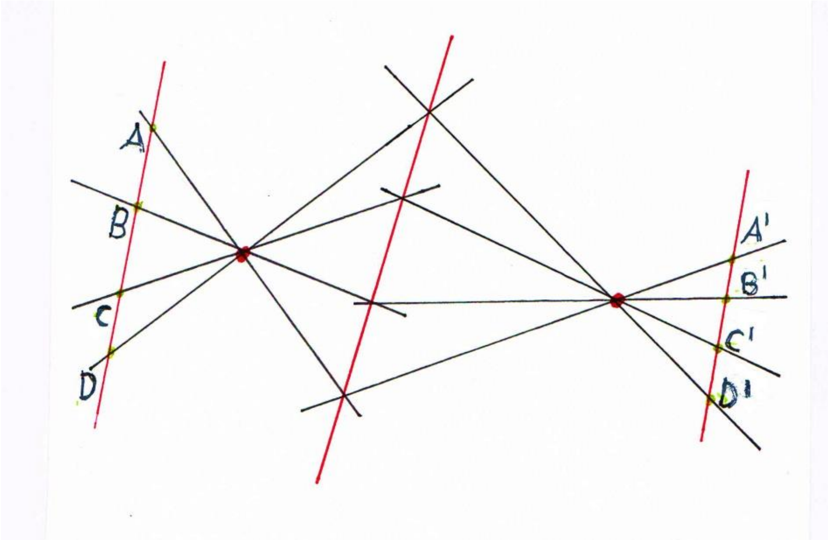

Abb. 22

Die Abbildung 22 zeigt 4 Punkte A, B, C, D einer Punktreihe. Diese Punkte werden durch je eine Gerade in einen Punkt aufgenommen (Scheinbildung) und erneut mit einer weiteren Gerade geschnitten. Es ergibt sich abermals eine Punktreihe, mit der der ganze Vorgang noch einmal wiederholt wird. Auf diesem Wege hat man eine Folge von Perspektivitäten aneinandergehängt. Die nicht bezeichneten Punkte der mittleren Punktreihe sind perspektiv zu den Punkten A, B, C, D. Gleichzeitig sind sie auch perspektiv zu den Punkten A‘, B‘, C‘, D‘. Die beiden Punktreihen am Anfang und am Ende der Kette sind natürlich nicht mehr perspektiv zueinander. Sie stehen aber dennoch in einer gesetzmässigen Beziehung zueinander, sie sind nämlich projektiv. Eine Kette von 2 oder mehreren aneinander gehängten Perspektivitäten ergibt immer eine Projektivität. Das projektive Verhältnis ist dadurch gekennzeichnet, dass, wenn es sich z. B. wie hier im Bild um Punktreihen handelt, jeder Punkt der Ausgangsreihe durch Konstruktion eindeutig einem Punkt der Endreihe zugeordnet werden kann. Berechnungen sind dazu nicht notwendig. Vielleicht kann man schon an dieser Stelle der Abbildung entnehmen, wie die Konstruktion weiterer einander zugeordneter Punkte aussehen könnte. Es wird aber auch weiter unten im Text darauf noch einmal eingegangen. Nicht in jeder perspektivischen Zeichnung ergeben sich unbedingt harmonische Punktwürfe. Diese treten dann auf, wenn man die perspektivische Mitte zwischen 2 mit dem Fluchtpunkt auf einer Geraden liegenden Punkten in Bezug auf diesen Fluchtpunkt sucht. Man begegnet hier demselben Problem wieder, das sich bereits bei der Kennzeichnung des Innen und Aussen ergeben hat. Dieses ist nämlich nicht absolut zu bestimmen, sondern immer in Bezug auf etwas; für den sich bewegenden Punkt in Bezug auf die Gerade, für die sich bewegende Gerade in Bezug auf den Punkt. Ebenso ist die Mitte einer Strecke, bzw. die Mitte zwischen 2 Punkten nicht absolut zu bestimmen. Fasst man die Halbierung so auf, dass eine Strecke in 2 messbar gleich lange Teile geteilt wird, so hat man eben die Mitte in Bezug auf den unendlich fernen Punkt gebildet. Dies tut man häufig unbewusst und sieht es als selbstverständlich an. Es ist ähnlich, wie wenn man den Innenbereich des Dreiecks, der ganz im Endlichen liegt, als den eigentlichen Innenbereich ansieht. Unbewusst hat man die Voraussetzung gemacht, dass das Innen sich nicht durch die Unendlichkeit ziehen kann. Eigentlich ist die Feststellung der Gleichheit von Abständen mit Hilfe des Messens aber ein Vorgang, der weniger ursprünglich ist als die rein geometrische Konstruktion der Mitte zwischen 2 Punkten in Bezug auf einen dritten. Darauf möchte ich im Folgenden eingehen. Man nehme eine Gerade und wähle auf ihr völlig beliebig 3 Punkte. Von jedem dieser 3 Punkte aus legt man eine weitere Gerade, so dass die 3 Geraden sich nicht in einem Punkt treffen, sondern ein Dreieck bilden (s. Abb. 23, schwarze Geraden). Nun ergeben sich naheliegend weitere Verbindungsgeraden (s. Abb. 23, rote Geraden). Man ergänzt das Ausgangsgebilde so, dass sich ein Viereck ergibt, von dem je zwei gegenüberliegende Seiten durch einen der drei ursprünglich gewählten Punkte gehen. Dem so konstruierten Viereck fehlt nur noch die zweite Diagonale. Zieht man diese (gestrichelte Linie), so schneidet sie die ursprünglich gewählte Gerade in einem vierten Punkt. Wie es gemeint ist, ergibt sich genau aus den Abbildungen 23 und 24.

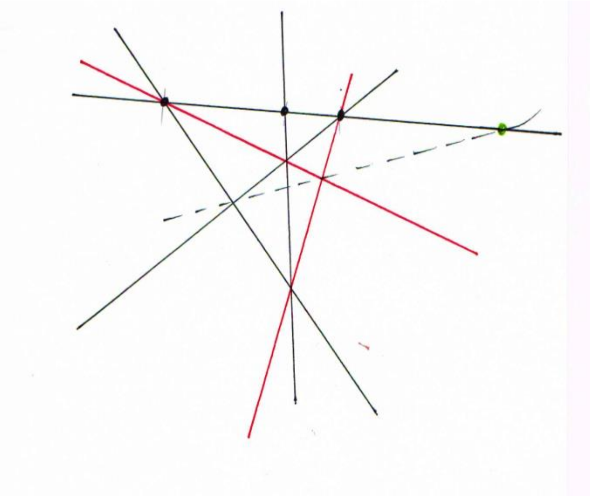

Abb. 23

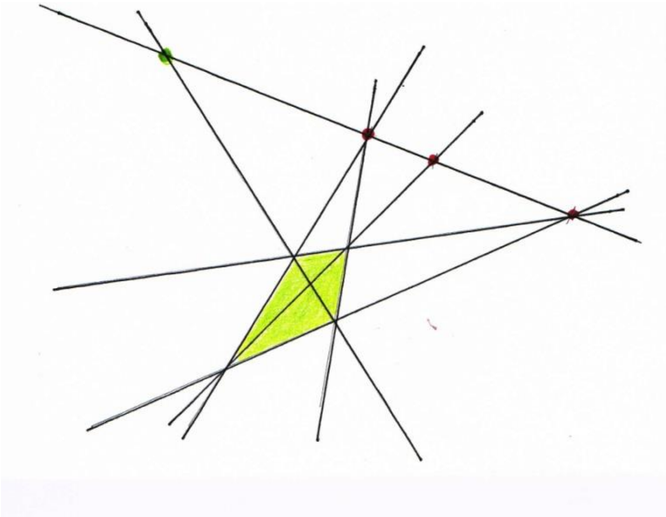

Abb. 24

Das Erstaunliche ist nun, dass, wenn man diese Konstruktion mehrfach mit denselben 3 Ausgangspunkten ausführt, sich immer derselbe vierte Punkt ergibt. Die Abbildung 25 veranschaulicht dies.

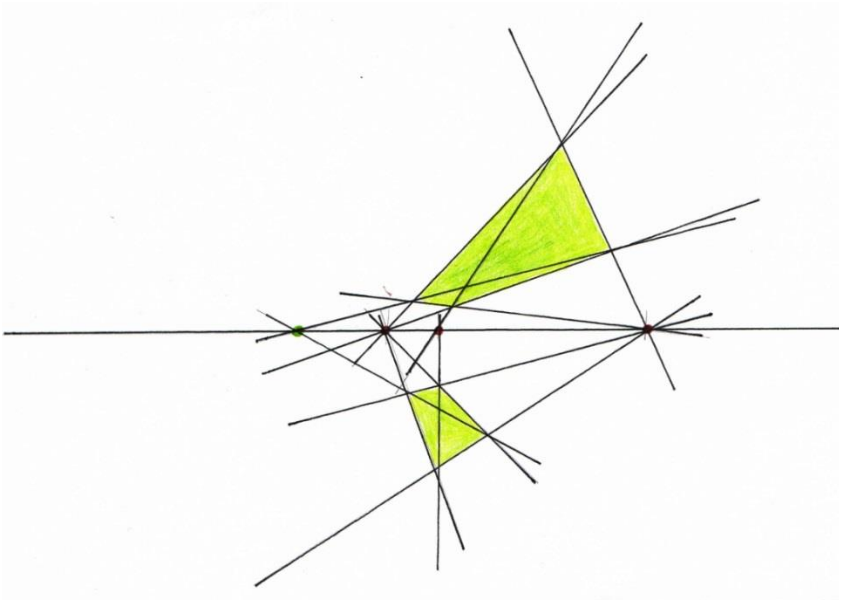

Abb. 25

Unabhängig von der Wahl der 3 Punkte haben die 4 Punkte, wenn der vierte auf die beschriebene Art und Weise konstruiert wird, immer harmonische Lage zueinander. Um einen harmonischen Punktwurf zu erhalten, braucht man also nur auf die angegebene Art ein Viereck zu konstruieren. Die Konstruktion ist so einfach und grundlegend, dass sich die eigene Ausführung empfiehlt. Durch fortgesetztes Ziehen von Linien kann man solche Vierecke zu ganzen Vierecksnetzen erweitern (Abb. 26). Diese bilden immer ein schachbrettartiges Rechtecksmuster in irgendeiner, wenn auch zum Teil ungewöhnlichen, Perspektive ab. Es ergibt sich das erstaunliche Phänomen, dass man, ausgehend von einem harmonischen Punktwurf perspektivische Flächenstrukturierungen erhält, ohne beim Zeichnen von den Gesetzmässigkeiten der Perspektive ausgegangen zu sein.[12]

[12] Vgl.Whicher 1970. Zu Beginn des Buches wird das Thema der Netzbildung ausführlich entwickelt.

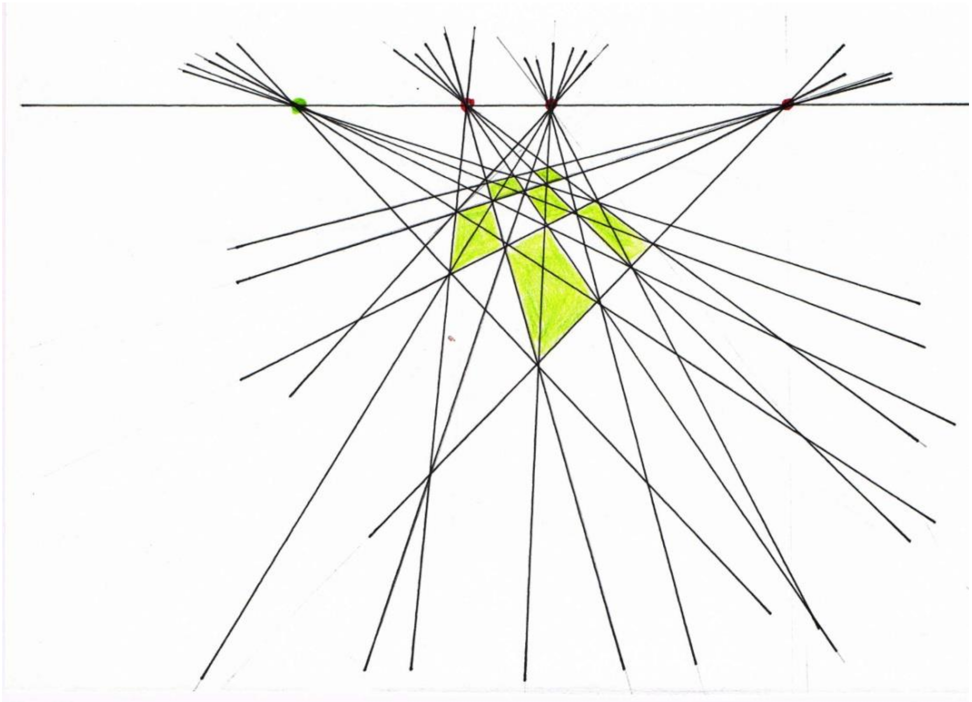

Abb. 26

Die Konstruktion in Abbildung 27 verdeutlicht nochmals besonders eindrücklich die Bezüglichkeit des Zwischen, bzw. der Mitte. Wiederum wurden 3 Punkte A, B, C auf einer Geraden willkürlich gewählt. Davon ausgehend wurden 3 Geraden gelegt, die ein Dreieck bilden (das hellgrüne Dreieck). Jede einzelne Ecke desselben wird durch 2 der 3 Geraden gebildet. Nun verbindet man jede Ecke mit dem Punkt A, B oder C derjenigen Geraden, die noch nicht durch sie hindurchgeht. Man erhält so ein weiteres Dreieck (dunkelgrün). Die beiden Dreiecke bilden eine Desarguessche Konfiguration.[13] Die Verbindungsgeraden der einander zugeordneten Ecken (rot) laufen durch einen Punkt. Die einander zugeordneten Seiten schneiden sich in den drei Punkten A, B und C, die ja auf einer Geraden liegen. Gleichzeitig hat man mit dieser Konstruktion ausgehend von den 3 Punkten A, B und C drei harmonische Punktwürfe gewonnen. Das neu hinzugekommene Dreieck ergänzt das erste auf 3 verschiedene Arten zu einem Viereck, welches jeweils einen harmonischen Punktwurf mit den drei Punkten A, B und C auf der ursprünglichen Geraden bildet. Für jedes der Vierecke stellt eine der hellgrünen Dreiecksseiten nun eine Diagonale dar. Zum Beispiel bildet die Seite durch den Punkt C die Diagonale des Vierecks, dessen gegenüberliegende Seiten sich in den Punkten A und B treffen. Die zweite Diagonale trifft die Ausgangsgerade im Punkt C‘. Der Punkt C‘ stellt also die Mitte zwischen A und B in Bezug auf C dar. Ebenso stellt der Punkt A‘ die Mitte zwischen B und C in Bezug auf A dar. Weiterhin und dies stellt für die Vorstellung vielleicht das grösste Problem dar: der Punkt B‘ stellt die Mitte zwischen A und C in Bezug auf B dar. Die Mitte liegt also hier in einem durch die Unendlichkeit gehenden Intervall, der Bezugspunkt im endlichen Intervall.

[13] Vgl. Locher Ernst 1980, Kap.: Harmonische Würfe

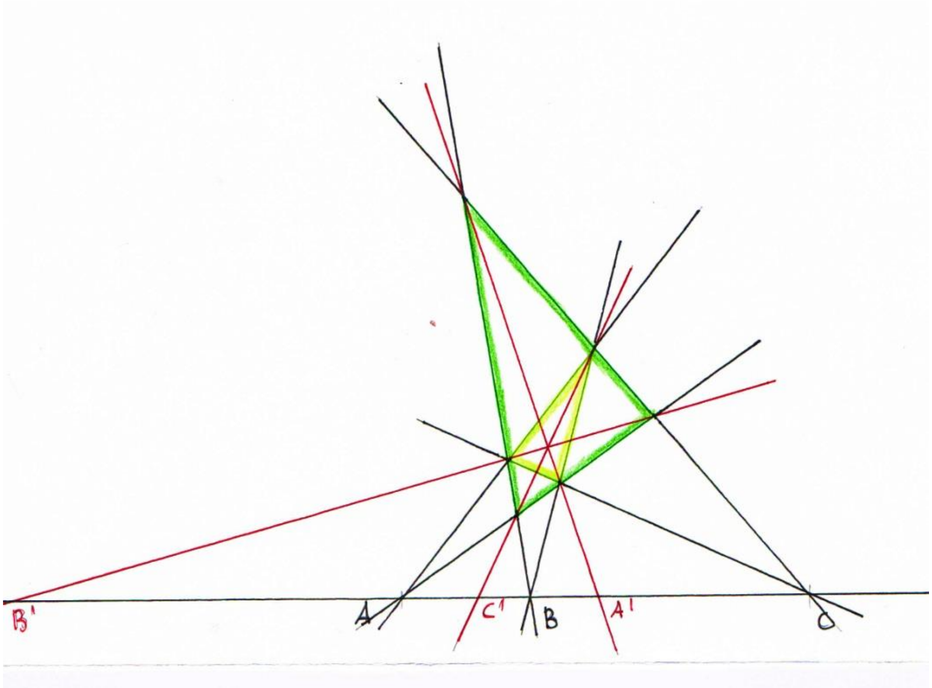

Abb. 27

Diese Betrachtungen verdeutlichen noch einmal, dass Eigenschaften, hier eben die Eigenschaft eines Punktes, in der Mitte zu liegen, sich immer in Bezüglichkeiten entfalten. Die Beeigenschaftung ist ein Vorgang der Bezugnahme. Von Eigenschaften im absoluten Sinn zu sprechen, macht keinen Sinn. Auf den ersten Blick scheint sich hier ein Widerspruch aufzutun zu der obigen Behauptung, dass 3 willkürlich auf einer Geraden gewählte Punkte immer zu demselben vierten Punkt führen, der dann die Ausgangspunkte zum harmonischen Punktwurf ergänzt. Denn jetzt haben wir ja nicht einen sondern drei Punkte gewonnen und alle drei bilden mit den Punkten A, B und C je einen harmonischen Wurf. Der scheinbare Wiederspruch löst sich folgendermassen: Jede Konstruktion, bei der die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks durch die Punkte A und B laufen, wird immer zum Punkt C‘ führen. Jede Konstruktion, bei der die gegenüberliegenden Seiten durch C und A führen, wird immer zu B‘ leiten. Entsprechendes gilt für den Punkt A‘. Es gibt grundsätzlich drei verschiedene Möglichkeiten, durch die Punkte A, B und C paarweise die Seiten und eine Diagonale laufen zu lassen. Durch jeden der Punkte kann entweder ein Seitenpaar gehen oder eine Diagonale. Der Punkt, durch den die Diagonale gezogen wird, ist gleichzeitig die Bezugsgrösse für das Zwischen. Der so gefundene neue Punkt markiert jeweils die Mitte zwischen den beiden anderen.

Nach diesen Vorüberlegungen lässt sich nun das eigentliche Prinzip der Projektivität nochmals genauer verdeutlichen. Beispielhaft soll dies hier für Punkte und Geraden geschehen, es gilt aber prinzipiell auch für Ebenen. Die Projektivität ordnet, wie bereits gesagt, Elemente eines Trägers eindeutig Elementen eines anderen Trägers zu. Beispielsweise werden die Punkte einer Punktreihe ein-deutig auf die Punkte einer beliebig gewählten zweiten Punktreihe bezogen, so dass jedem Punkt der einen Reihe genau ein Punkt der anderen Reihe entspricht. Der Einfachheit halber gehe ich hier davon aus, dass die beiden Punktreihen in einer Ebene liegen. Wenn sie windschief sind, ist die Zuordnung auch möglich, die Konstruktion wird aber etwas komplizierter. Grundsätzlich sind natürlich verschiedene Arten und Weisen denkbar, eine solche Zuordnung vorzunehmen. Eine Möglichkeit haben wir ja bereits bei der Projektion einer Figur von einer Ebene in eine andere betrachtet. Es liegt nun der erstaunliche Sachverhalt vor, dass man auf zwei beliebig gewählten Geraden je 3 Punkte willkürlich setzen kann und damit die Zuordnung sämtlicher anderen Punkte der beiden Geraden zueinander festgelegt hat.[14] Dass zwei willkürlich gesetzte Punktreihen überhaupt projektiv zueinander sind, kann man zeigen, indem man die Reihe der Perspektivitäten findet, die der Projektivität zugrunde liegt. Auf den beiden Abbildungen 28 und 29 wurden die beiden

[14] Diese Tatsache, die eine der grundlegendsten der projektiven Geometrie ist, wird als Fundamentalsatz bezeichnet. Vgl. z. B. Locher Ernst 2016. Kap.: Der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie.

Punktreihen mit den Punkten A, B und C sowie A‘, C‘ und B‘ irgendwie gesetzt. Die Lage dieser Punkte in Abbildung 28 entspricht derjenigen in Abbildung 29. (Die Vertauschung der Reihenfolge der Punkte ist nicht zwingend, sie ist lediglich zeichnerisch praktisch. Ich kann die Punkte beliebig setzen, je nachdem ergeben sich allerdings Zeichnungen von unpraktikablem Ausmass.)[15]

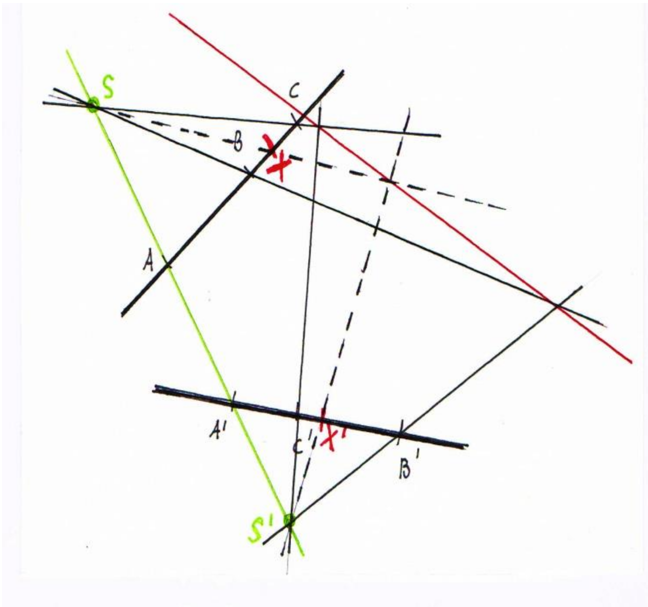

Abb. 28

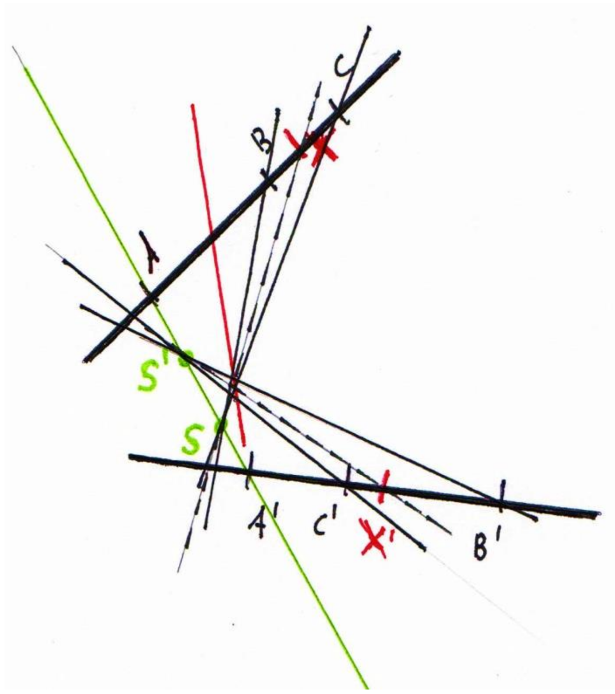

Abb. 29

Die Aufgabe besteht nun darin, eine vermittelnde Gerade zu finden, die zu beiden Punktreihen perspektiv ist. Zu diesem Zweck verbindet man die einander zugeordneten Punkte A und A‘ mit einer Geraden (in Abb. 28 und 29 grün) und wählt auf dieser Geraden zwei beliebige Punkte S und S‘. Die beiden Geraden SB und S’B‘ schneiden sich in einem Punkt. Dasselbe gilt für die beiden Geraden SC und S’C‘. Man verbindet die beiden Schnittpunkte und erhält die gesuchte Gerade (rot), die zu den beiden ursprünglichen Punktreihen perspektiv liegt: Vom Punkt S aus hat man die Punkte A, B und C auf die rote Gerade projiziert. Für den Punkt A ist dies auf der Zeichnung nicht sichtbar. Er liegt in Abbildung 28 in der Verlängerung der roten Gerade schräg nach links oben, dort, wo sie die grüne Gerade schneidet. Vom Punkt S‘ aus hat man die Punkte A‘, C‘ und B‘ ebenfalls auf die rote Gerade projiziert. Sie fallen mit der Projektion der Punkte A, B und C exakt zusammen. Wählt man auf der Geraden SS‘ zwei andere Projektionspunkte, so ergibt sich eine andere Lage der vermittelnden Geraden. In Abbildung 29 ist das an einem Beispiel ausgeführt. Es gibt aber unzählige Möglichkeiten. Egal, wo die vermittelnde Gerade liegt: man kann sie auf dem angegebenen Weg immer finden und man kann mit ihrer Hilfe jedem weiteren Punkt auf der ersten Gerade eindeutig einen Punkt auf der zweiten Gerade zuordnen. In den Abbildungen 28 und 29 ist das für den Punkt X gezeigt. Unabhängig von der Lage der roten Geraden wird ihm der gleiche Punkt X‘ zugeordnet. Würde man auf beiden Geraden je einen vierten Punkt willkürlich setzen, so würde man mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit nicht zwei einander entsprechende Punkte treffen. Was für drei Punkte immer gilt, nämlich, dass sie einander zugeordnet sind und die Projektivität festlegen, gilt für vier Punkte nicht mehr. Darüber hinaus ergibt sich, dass in der projektiven Beziehung

[15] Genau genommen kann man bei drei Punkten nicht von einer Änderung der Reihenfolge sprechen, sondern nur von einer Änderung der Richtung des Durchlaufens. Bei der Punktreihe A, B, C gelange ich von A über B nach C, ohne die Unendlichkeit zu durchlaufen. Bei der Punktreihe A‘, C‘, B‘ gelange ich entweder von A‘ über C‘ nach B‘, ohne die Unendlichkeit zu durchlaufen oder von A‘ durch die Unendlichkeit über B‘ nach C‘. Die Anordnung der Punkte legt also nur dann eine eindeutige Reihenfolge fest, wenn die Durchlaufrichtung ebenfalls festgelegt ist.
Vgl. dazu: Locher: Projektive Geometrie, Kap.: Die Anordnung der Grundelemente im Raum.

grundlegende Eigenschaften wie Reihenfolge[16] und harmonische Lage erhalten bleiben. Lege ich auf eine Gerade einen harmonischen Punktwurf und projiziere sie mittels der beschriebenen Konstruktion auf eine zweite, so ergibt sich wieder ein harmonischer Wurf. Die Abbildungen 30 und 31 zeigen dieselbe Art der Zuordnung, ausgeführt für je drei Strahlen eines Bündels. Die Konstruktion entspricht der ersten in exakt polarer Weise.

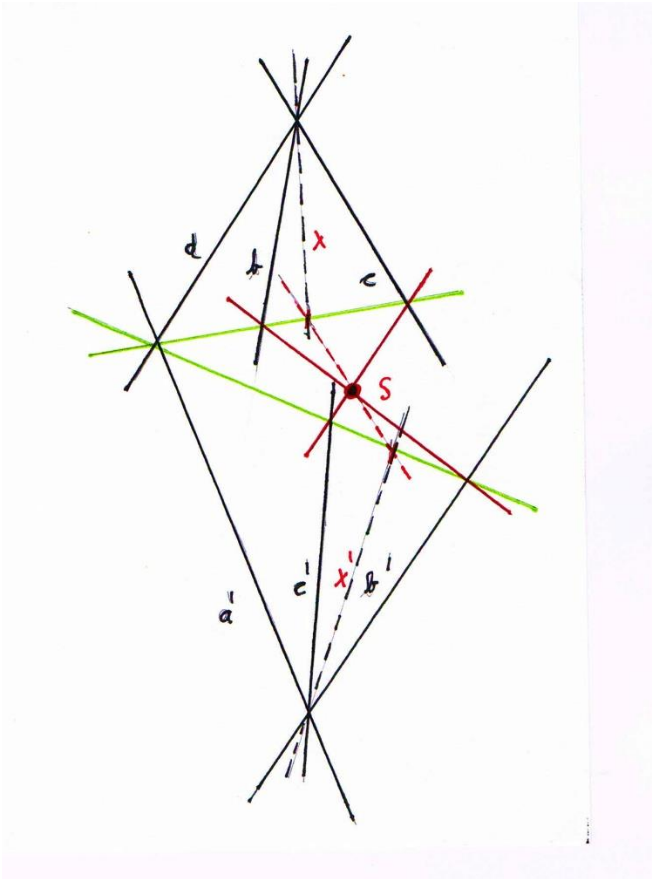

Abb. 30

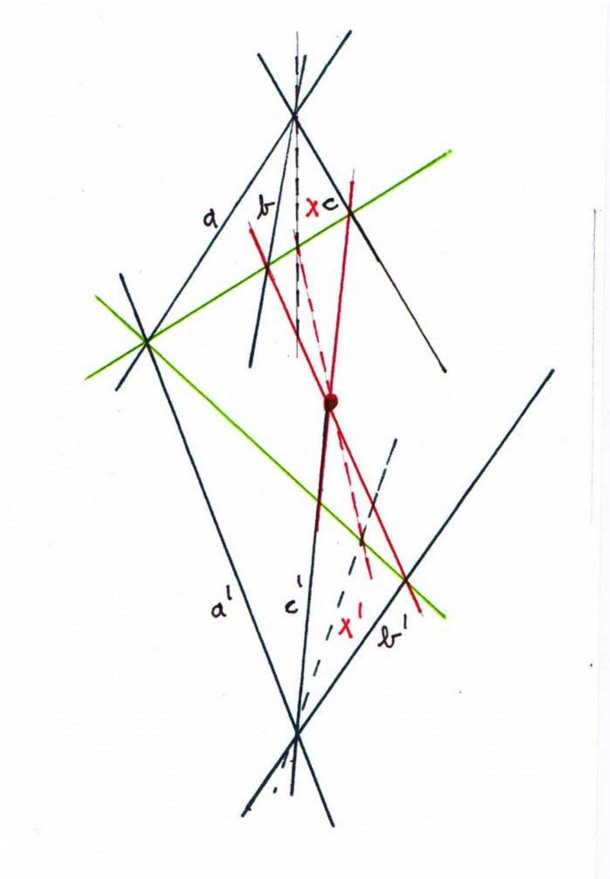

Abb. 31

Man legt beliebig drei Strahlen a, b und c durch einen Punkt und drei Strahlen a‘, c‘ und b‘ durch einen weiteren. Durch den Schnittpunkt der Strahlen a und a‘ legt man zwei Geraden (grün), sodass die eine Gerade die Strahlen b und c, die andere die Strahlen c‘ und b‘ schneidet. Die Schnittpunkte von b und b‘ sowie diejenigen von c und c‘ verbindet man. Die beiden Verbindungsgeraden (rot) schneiden sich im Punkt S. Hat man diesen Punkt gefunden, so kann man jedem Strahl des ersten Büschels eindeutig einen Strahl des zweiten Büschels zuordnen. In den Abbildungen 30 und 31 ist es ausgeführt für die Strahlen x und x‘. Die beiden grünen Geraden können wiederum auf unzählige Weisen gelegt werden. Die Bedingung ist lediglich, dass sie sich im Schnittpunkt von a und a‘ schneiden. Je nach Lage der beiden Geraden variiert auch die Lage des Schnittpunktes S. Unabhängig davon wird aber durch jede so ausgeführte Konstruktion jedem beliebigen zu den drei ersten Strahlen hinzukommenden Strahl der gleiche im zweiten Büschel liegende Strahl zugeordnet. Auch hier werden harmonische Würfe wieder in harmonische Würfe übergeführt. Ein harmonischer Strahlenwurf besteht aus vier Strahlen, die, wenn man sie irgendwie mit einer Geraden schneidet, auf diese einen harmonischen Punktwurf legen. Die Projektivität ermöglicht verschiedene Konstruktionen, die, obwohl man lediglich mit Punkten und Geraden umgeht, in die Krümmung hineinführen. Zum Beispiel liegen die Schnittpunkte einander zugeordneter Strahlen alle auf einem Kegelschnitt. Die Verbindungsgeraden einander zugeordneter Punkte sind sämtlich Kegelschnitttangenten. Hierzu folgen einige Illustrationen.

---

[16] Von Reihenfolge im eigentlichen Sinne kann man erst bei mindestens vier Punkten sprechen. Die Reihenfolge A, B, C, D ist unterschieden z. B. von A, C, D, B, nicht aber von C, D, A, B.

Die beiden Abbildungen 32 und 33 zeigen noch einmal die Möglichkeit der Konstruktion auf. In beiden Fällen kann man aufeinander folgende Perspektivitäten erkennen: ein Strahlenbüschel wird mit zwei verschiedenen Geraden geschnitten (Abb. 32). Von der zweiten Punktreihe (blau) ausgehend, werden die Strahlen in ein zweites Büschel aufgenommen und auf dem Wege dahin von einer weiteren Punktreihe geschnitten. Die so einander zugeordneten Schnittpunkte auf den Geraden g und g‘ werden jeweils miteinander verbunden (rot). Die Verbindungsgeraden sind Tangenten an einen Kegelschnitt. Polar dazu: Ein Strahlenbüschel wird von einer Punktreihe geschnitten (Abb. 33). Die Schnittpunkte werden in ein zweites Büschel aufgenommen und von einer weiteren Punktreihe geschnitten. Diese Schnittpunkte werden in ein weiteres Büschel aufgenommen. Die so einander zugeordneten Geraden werden verlängert, bis sie sich schneiden. Ihre Schnittpunkte liegen auf einem Kegelschnitt. In dem einen Fall hat man zwei Punktreihen, vermittelt durch zwei Büschel und eine weitere Punktreihe. Im anderen Fall zwei Büschel, vermittelt durch zwei Punktreihen und ein weiteres Büschel. Durch die Hervorhebung der grünen Geraden sind beide Konstruktionszeichnungen so gestaltet, dass sichtbar wird, wie sie in einem Fünfeck liegen.[17] Die Punktreihen g und g‘, die Verbindungsgerade a der beiden Büschelpunkte, sowie die Geraden b und c, die jeweils von einem Büschelpunkt ausgehend, die gegenüberliegende Gerade g bzw. g‘ schneiden, bilden die Seiten des Fünfecks. Die Büschelpunkte G und G‘, der Schnittpunkt A der beiden die Büschelgeraden schneidenden Punktreihen sowie die Punkte B und C, die jeweils von einem der Büschelpunkte ausgehend die gegenüberliegende Gerade schneiden, bilden die Ecken des Fünfecks. Durch dieses Hilfsmittel wird die zeichnerische Ausführung beträchtlich erleichtert. Betrachtet man lediglich das Fünfeck, so kann man leicht feststellen, dass es so gestaltet ist, dass alle Ecken und alle Seiten untereinander ihre Rollen tauschen können. Zum Beispiel könnten die Punkte A und C ebenso gut die Rolle der Büschelpunkte G und G‘ übernehmen. Dasselbe gilt für die Geraden a und c, die die Rolle der Punktreihen g und g‘ spielen könnten. Je zwei durch eine dem Fünfeck angehörende Gerade verbundenen Ecken können die Rolle der beiden Büschelpunkte übernehmen, je zwei in einer Fünfeckspitze zusammen laufenden Geraden können die Rolle der beiden Punktreihen übernehmen. Grundsätzlich sind die Konstruktionen auch ohne diesen Rollentausch ausführbar, man stösst dabei aber teilweise auf die praktische Schwierigkeit sehr weit entfernt liegender Elemente. Auch hier ist wieder das schon öfter erwähnte Element der Bezüglichkeit erkennbar. Die Punkte oder Geraden übernehmen nicht statische und damit starr festgelegte Aufgaben, sondern jedes Element kann, je nachdem, wie es zu anderen Elementen in Beziehung steht, die eine oder andere Aufgabe erfüllen In die Konstruktionen kommt damit ein hohes Mass an Beweglichkeit hinein. Die folgenden Beispiele zeigen: eine verhältnismässig „dickbauchige“ Ellipse, tangential gebildet (Abb. 34), dann eine schmal gezogene (Abb. 35), eine Parabel (Abb. 36) und eine Hyperbel (Abb. 37). Die Parabel kommt dadurch zustande, dass eine der Fünfeckgeraden in die Unendlichkeit gewandert ist, die Hyperbel dadurch, dass die betreffende Gerade nach dem Durchgang durch die Unendlichkeit auf der anderen Seite wieder in der Endlichkeit erscheint. Die beiden letzten Abbildungen zeigen zwei punktuelle Konstruktionen: eine fast kreisförmige Ellipse (Abb. 38) sowie eine Hyperbel (Abb. 39). Dass die Lage des Kegelschnittes durch die Wahl des Fünfecks eindeutig festgelegt ist, ergibt sich aus der Projektivität. Die Geraden g und g‘ werden durch die Geraden a, b und c jeweils in einem Punkt geschnitten. Man hat damit drei Punkten auf g eindeutig drei Punkte auf g‘ zugeordnet. Man könnte gerade so gut auf den Geraden g und g‘ je drei Punkte wählen und von diesen ausgehend das Fünfeck konstruieren. Die Gesetzmässigkeit der Projektivität ist ein für die projektive Geometrie grundlegender Gedanke, der immer wieder Verwendung findet. Er wurde hier relativ ausführlich erläutert und wird im nächsten Kapitel noch einmal aufgegriffen und in einem Zusammenhang betrachtet, der über das rein geometrische hinausführt.

[17] Vgl. Bernard 1984., Kap.: Ellipse, Parabel und Hyperbel im Fünfstern. Die Sechsecke von Pascal und Brianchon.

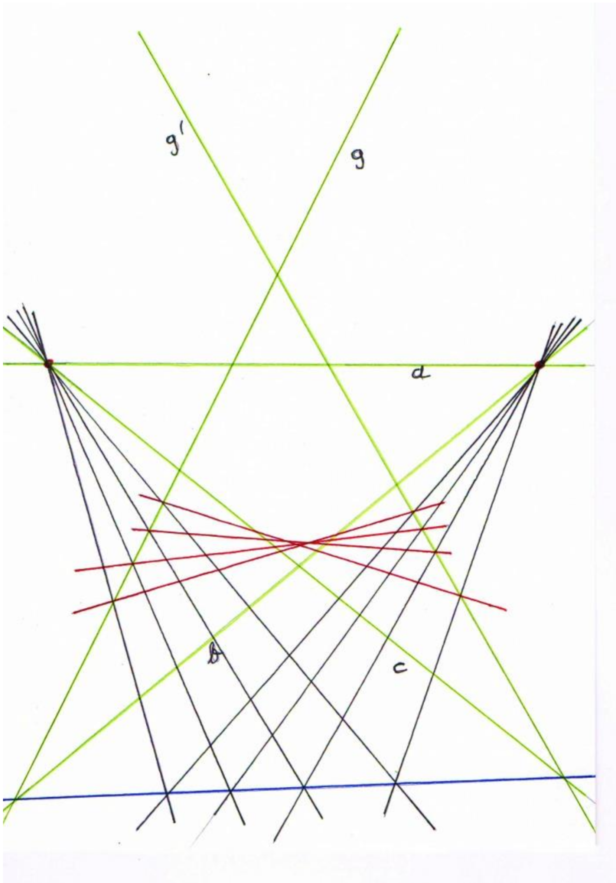

Abb. 32

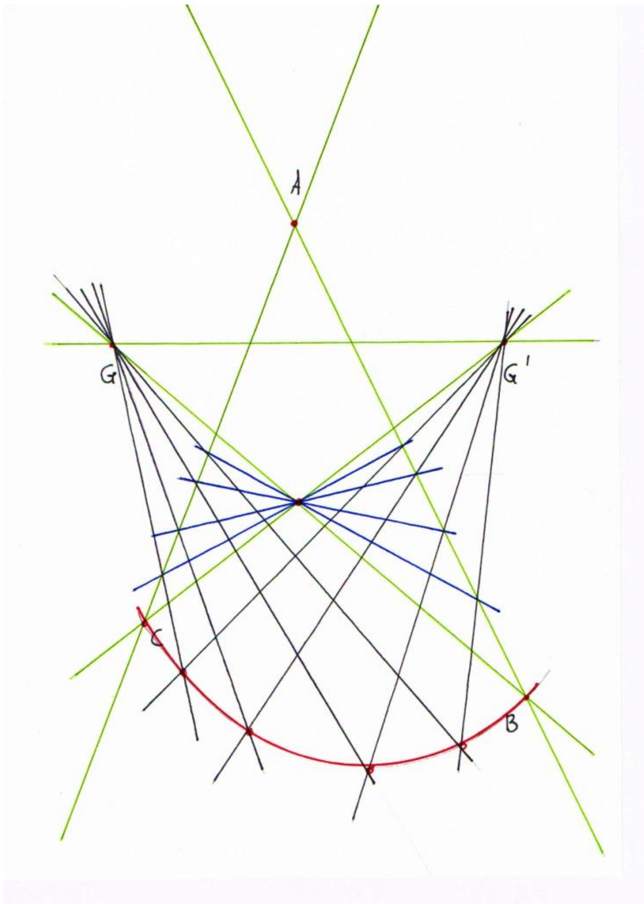

Abb. 33

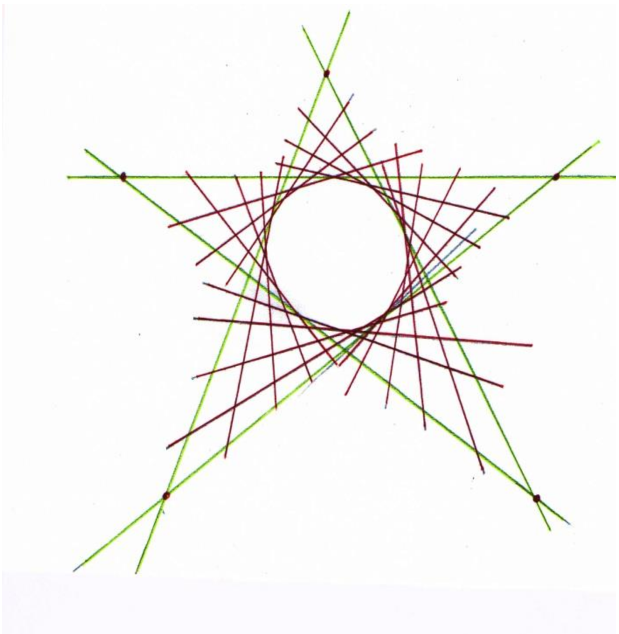

Abb. 34

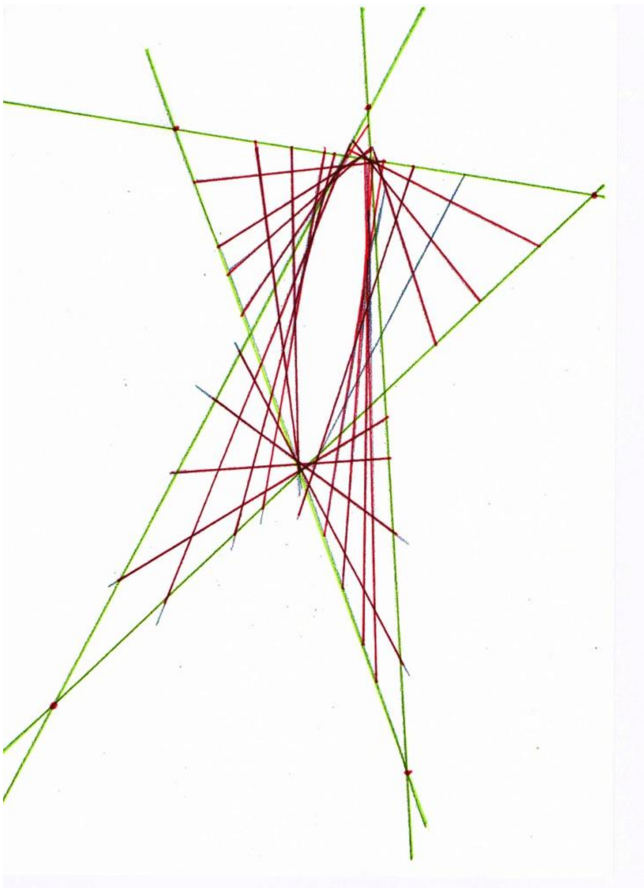

Abb. 35

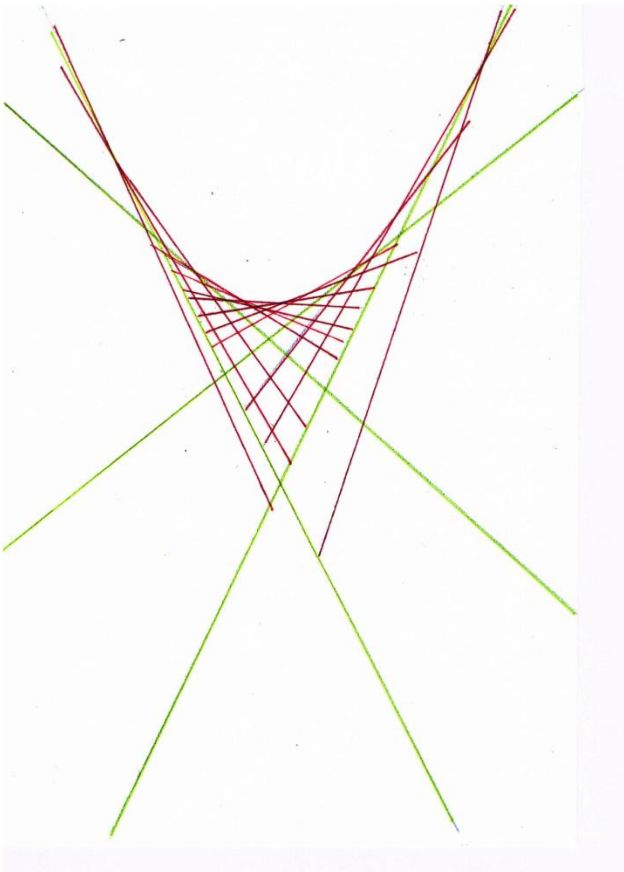

Abb. 36

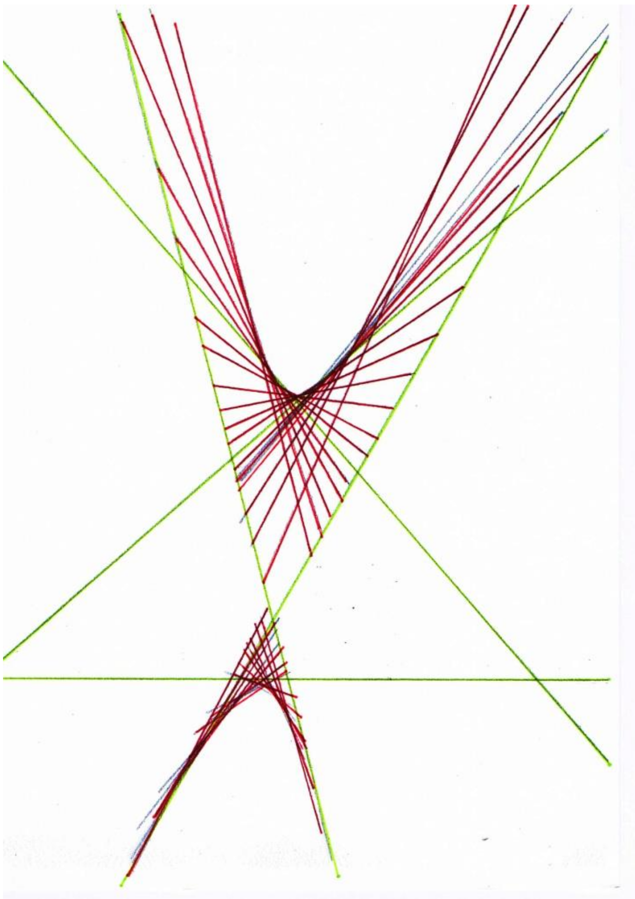

Abb. 37

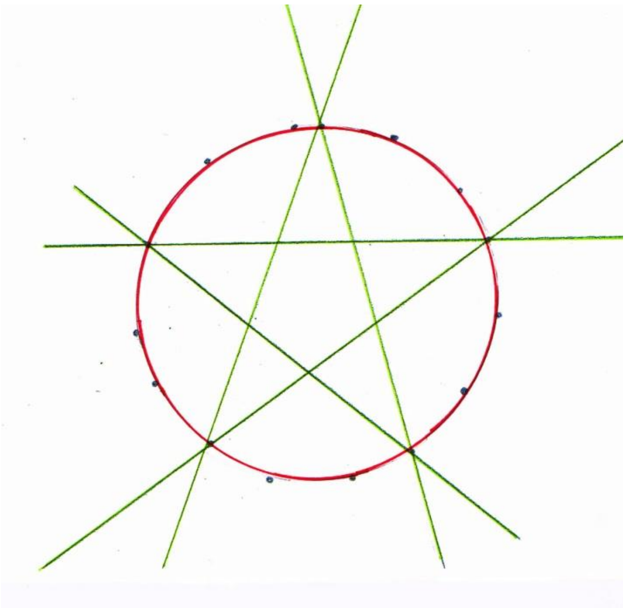

Abb. 38

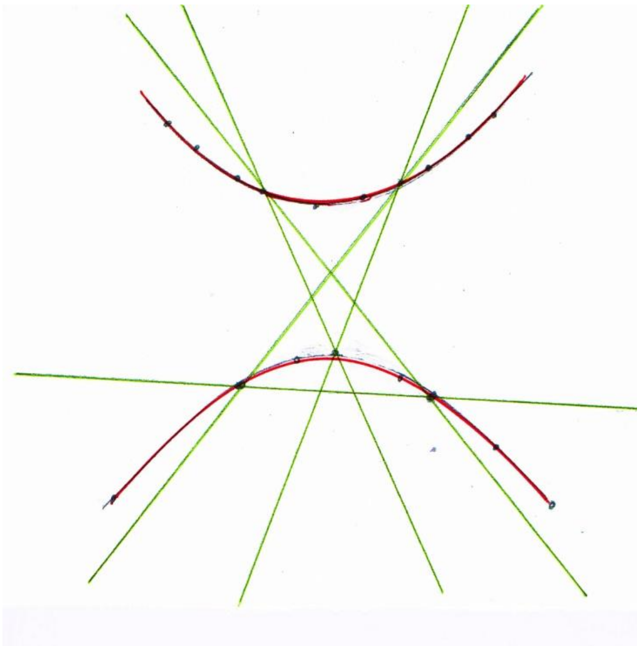

Abb. 39